Uniwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii
Instytut Fizyki Doświadczalnej
pl. M. Borna 9
50-204 Wrocław
tel. +48 71 375 93 02, +48 71 328 73 65
fax +48 71 328 73 65
e-mail: sekr@ifd.uni.wroc.pl
www.ifd.uni.wroc.pl

Elektrotechnika i elektronika (konspekt)

Franciszek Gołek (golek@ifd.uni.wroc.pl)
www.pe.ifd.uni.wroc.pl

Wykład 5.

Obwody magnetyczne i podstawy elektromechaniki

Przetworniki elektromechaniczne spotykamy w wielu dziedzinach techniki (od technik w medycynie do technik związanych z eksploracją kosmosu).

Zagadnienie obwodów magnetycznych jest jednym z fundamentalnych w opisie działania i przy projektowaniu przetworników elektromechanicznych.

Stałe pola magnetyczne wytwarzane są przez ładunek elektryczny w ruchu stacjonarnym, a ich efekt ujawnia się poprzez siłę jaką wywierają na każdy poruszający się ładunek elektryczny.

Zmienne pola magnetyczne, generowane przez niestacjonarny ruch ładunku działają na każdy, również nieruchomy, ładunek elektryczny.

W projektowaniu maszyn elektrycznych podstawę stanowią: prawo Faradaya

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

prawo Ampère'a

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

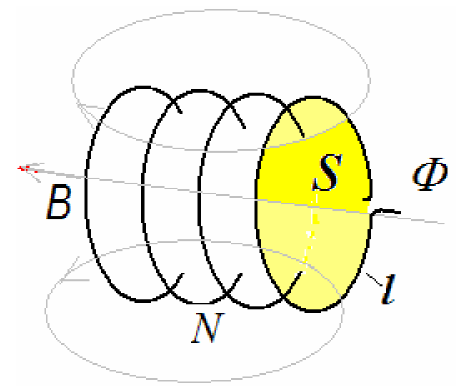
i wzór Lorentza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Dla obliczenia napięcia indukowanego w uzwojeniach maszyny stosujemy prawo Faradaya (ma ono zastosowanie również do obliczania strat związanych z prądami wirowymi).

SEM w uzwojeniu zawierającym N zwoi wynosi:

$$SEM = \oint_l E \cdot \mathrm{d}l = -k_w N \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S B \cdot \mathrm{d}S = -k_w N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$



gdzie, Φ strumień magnetyczny, **Ψ = NΦ strumień skojarzony (flux linkage)**, współczynnik $k_w < 1$ uwzględnia fakt nie idealnego przenikania strumienia magnetycznego przez wszystkie zwoje.

Przykład. Zmienne pole magnetyczne o amplitudzie Bmax = 1 T, częstotliwości 50 Hz przenika uzwojenie 100 zwoi o powierzchni przekroju 0,01 m^2 i współczynniku uzwojenia $k_w = 0,9$. Oblicz wartość siły elektromotorycznej indukowanej w uzwojeniu.

Rozw. Z prawa Faradaya w postaci:

$$SEM = -\frac{d\Psi}{dt} = -k_w N \frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

mamy związek: $SEM = -k_w N(d/dt)(BS\sin\omega t) =$

$-0{,}9\cdot 100(d/dt)(1Vs/m^2\ 0{,}01m^2 \sin(2\pi 50 rad\cdot s^{-1}\cdot t)) =$

$(-90\pi\ V)\cos(314 rad\cdot s^{-1}\cdot t) = -283\cos(314 rad\cdot s^{-1}\cdot t)\ V.$

Amplituda indukowanego napięcia wynosi zatem 283 V, a wartość skuteczna $383/2^{0,5}$ V = 200 V.

Proste związki między jedostkami

Jednostką strumienia magnetycznego jest Weber (1Wb), wyraźmy go przy pomocy innych jednostek:

$d\Phi/dt$ = SEM -> $T \cdot m^2/s = V$ -> $T = V \cdot s/m^2$

$Wb = [\Phi] = [B] \cdot [S] = T \cdot m^2 = (V \cdot s/m^2) \cdot m^2 = V \cdot s$.

Widać, że: $T = Wb/m^2 = V \cdot s/m^2$

ale również 1T mamy ze wzoru Lorentza:

$F = Qv \times B$ -> $B = F/Qv$ –>

$[B] = T = N/(C \cdot m/s) = (J/m)/(A \cdot m) =$

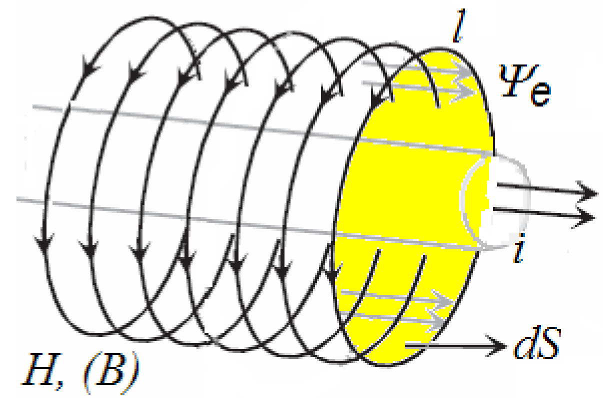
$(V \cdot A \cdot s)/(A \cdot m^2) = V \cdot s/m^2$, zgadza się!

Uogólnione przez Maxwella prawo Ampère'a zawiera pochodną czasową ze strumienia indukcji elektrycznej D.

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Całkując obie strony po powierzchni S z brzegiem l

$$\oint_l H \cdot \mathrm{d}l = \int_S J \cdot \mathrm{d}S + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S D \cdot \mathrm{d}S = i\,(t) + \frac{\mathrm{d}\psi_e}{\mathrm{d}t}$$



Składnik ten: $\frac{\partial D}{\partial t}$ oraz $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S D \cdot \mathrm{d}S$

stanowi tzw. prąd przesunięcia Maxwella i często w analizie maszyn elektrycznych pracujących przy niskich częstotliwościach jest pomijany.

Przykład. Oblicz prąd przesunięcia w warstwie izolacyjnej (między uzwojeniem a rdzeniem) o przenikalności $\varepsilon_r = 3$, o grubości 0,3 mm i powierzchni 0,01 m^2. Rdzeń jest uziemiony a w uzwojeniu pojawia się potencjału = $400V\sin(2\pi 50/s\ t)$. $\varepsilon_o = 8{,}854 10^{-12}$ F/m.

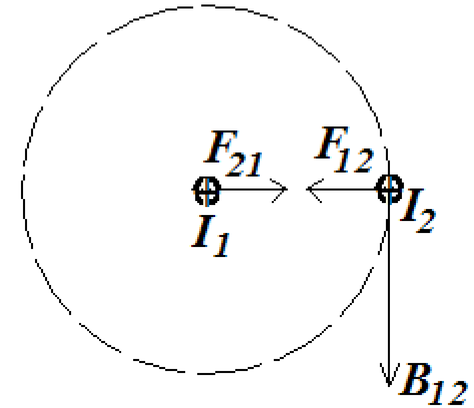
Rozwiązanie. $E_{max} = 400V/0{,}3mm = 1333kV/m$, $D = \varepsilon E = \varepsilon_r \varepsilon_o E$,

$D_{max} = 3 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm $\cdot 1333$ kV/m = 3,54 10^{-5} As/m^2 = 3,54 10^{-5} C/m^2

$\Psi_e = S \cdot D = 0{,}01m^2 \cdot 3{,}54 \cdot 10^{-5}As/m^2 \cdot \sin(314t) = 3{,}54 \cdot 10^{-7}As \cdot \sin(314t)$

$d\Psi_e/dt = 314\ 3{,}54\ 10^{-7}A \cos(314t) = 111\ 10^{-6}A\cos(314t) = 111\mu A\cos(314t)$,

Wartość skuteczna prądu przez izolację wynosi: $111\mu A/2^{0,5} = 78{,}6\ \mu A$ – niewiele (mała pojemność i niska częstotliwość to i małe prądy przeładowywania!).



Obliczmy siłę oddziaływania dwóch prostoliniowych i równoległych przewodów z prądem.

Ponieważ linie pola magnetycznego wytwarzanego przez każdy z przewodów z osobna są symetrycznymi kołami możemy łatwo uzyskać z prawa Ampère'a równość: $2\pi r B_{12} = \mu_o I_1$ i podobnie $2\pi r B_{21} = \mu_o I_2$.

Siła działająca na przewód z prądem I_2 wyniesie $F_{12} = B_{12} I_2 l$ po podstawieniu $\mu_o = 4\pi 10^{-7} H/m$ i wartości $B_{12} = \mu_o I_1/(2\pi r)$ otrzymamy:

$F_{12} = 2 I_1 I_2 l\ 10^{-7}/r$ N. Identycznie otrzymujemy F_{21}, jej wartość jest identyczna z F_{12} ale zwrot przeciwny (i nic dziwnego, akcja równa jest reakcji ze znakiem przeciwnym).

Obwód Magnetyczny

Obwodem magnetycznym nazywa się zamkniętą drogę, po której przebiega strumień magnetyczny, drogą tą zwykle jest materiał o dużej przenikalności magnetycznej przyczyniając się do uzyskania dużej indukcji magnetycznej. Analizując układ w którym prąd przesunięcia **dD/dt jest zerowy** lub do pominięcia możemy korzystać z **prawa Ampère'a** w postaci:

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \longrightarrow \nabla \times H = J \longrightarrow \oint_l H \cdot \mathrm{d}l = \int_S J \cdot \mathrm{d}S$$

z której wynika, że całka po krzywej zamkniętej z natężenia pola magnetycznego równa jest sumie (całce z) prądów przenikających powierzchnię rozpiętą na tej krzywej. W przypadku uzwojeń maszyn elektrycznych sumą tą jest tzw. **przepływ** Θ = NI, nazywany też siłą magnetomotoryczną (SMM = Fm) i wyrażany w amperach bo N – liczba zwoi jest wielkością niemianowaną. Jest to iloczyn natężenia prądu i ilości zwoi z tym prądem otoczonych krzywą całkowania pola H. Stwierdzenie to nazywamy **prawem przepływu**.

$$\boxed{\text{Przepływ} = \text{Siła SMM} = F_m = NI = \Theta = \oint_l H \cdot \mathrm{d}l \approx H\, l_{\text{średnie}}}$$

Materiał	μ_r
Powietrze	1
Stal	4000
Żelazo	5195
Permaloj	100 000

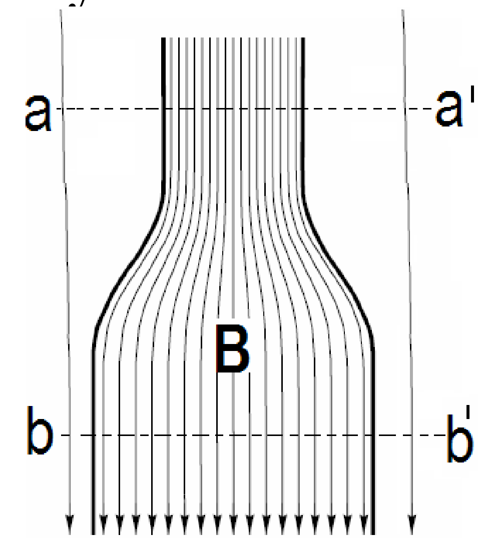
Pomiędzy natężeniem pola magnetycznego **H** i indukcją magnetyczną **B** istnieje związek:

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$ [Wb/m lub T]

gdzie $\mu_o = 4\pi 10^{-7} H/m$ – przenikalność próżni,

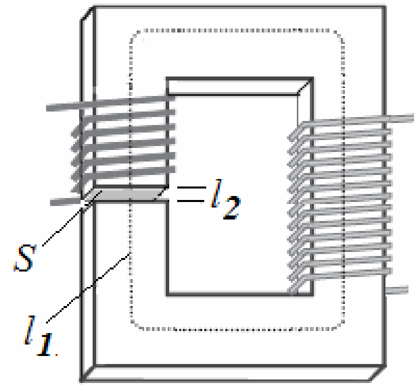
a μ_r - przenikalność względna materiału (względem próżni).

Olbrzymia wartość μ_r materiałów ferromagnetycznych oznacza możliwość uzyskiwania dużych gęstości pól indukcji magnetycznej B przy małym prądzie w strukturach elektromagnetycznych. W konsekwencji wiele elektromechanicznych urządzeń zawiera rdzenie wykonane z takich materiałów celem osiągnięcia odpowiednio dobrych parametrów. Koncentrowanie się silnego pola indukcji **B** w materiałach o dużej przenikalności jest **analogiczne do** koncentrowania się **natężenia prądu** elektrycznego w materiałach (i obwodach) o dużej przewodności.



Rozkład gęstości strumienia pola magnetycznego (czyli indukcji B) w materiale o dużej przenikalności magnetycznej μ.

Prosty obwód magnetyczny: rdzeń i wąska szczelina.



Zakładając, że rozproszenie strumienia poza rdzeń i szczelinę jest znikome możemy napisać:

$\mathbf{\Phi = B_1S_1 = B_2S_2 = B_3S_3 = ... = \mu_1H_1S_1 = \mu_2H_2S_2 = ... = \mu_nH_nS_n}$

Dla średniej linii indukcji magnetycznej (linia przerywana) prawo przepływu implikuje: $\mathbf{H_1l_1 + H_2l_2 + ... + H_nl_n = NI = \Theta}$. Postać tej równości (patrz napięciowe prawo Kirchhoffa) upoważnia do tego, że H_nl_n – nazywamy spadkami potencjału (napięcia) magnetycznego, NI – (SMM) jest siłą magnetomotoryczną,

Podstawiając $\mathbf{\Phi/(\mu_nS_n)}$ **za** $\mathbf{H_n}$ otrzymamy:

$$\frac{\Phi l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{\Phi l_2}{\mu_2 S_2} + \ldots.. + \frac{\Phi l_n}{\mu_n S_n} = NI$$

Otrzymana równość **jest prawem Ohma dla obwodu magnetycznego**, w którym

$R_m = NI/\Phi$ – nazywamy **reluktancją**,

$[R_m] = [NI/\Phi] = A/Vs = 1/H$

$G_m = \Phi/NI$ – nazywamy **permeancją**,

jest to odwrotność reluktancji.

$$\boxed{\Phi = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1 S_1} + \frac{l_2}{\mu_2 S_2} + \ldots.. + \frac{l_n}{\mu_n S_n}} = \frac{NI}{\sum_{i=1}^{n} R_{mi}}}$$

Strumień Φ jest tu odpowiednikiem natężenia prądu. Z prawa Ohma dla obwodu magnetycznego wynika, że dla danego przepływu Θ = NI duży strumień Φ w obwodzie uzyskujemy przy małych wartościach R_m. Małe wartości R_m wykazują materiały o dużym współczynniku przenikalności magnetycznej **μ.** Zatem nic dziwnego, że głównym oporem magnetycznym, **reluktancją,** w obwodach magnetycznych są szczeliny powietrzne.

Analogie między obwodami elektrycznymi i magnetycznymi

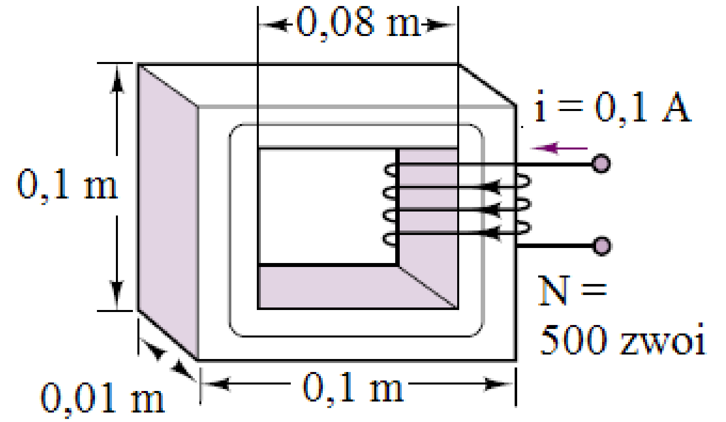
Obwód magnetyczny	Obwód elektryczny
Natężenie pola magnetycznego, H	Natężenie pola elektrycznego, E
Siła magnetomotoryczna, $\mathcal{F}_{\mathrm{m}} = \mathrm{NI}$	Siła elektromotoryczna, v
Strumień magnetyczny, ϕ	Prąd, i
Gęstość strumienia magnetycznego, B	Gęstość prądu, J
Reluktancja, $\mathcal{R}_{\mathrm{m}}$	Rezystancja. R
Przenikalność, μ	Przewodność właściwa, σ

W uproszczonej i często stosowanej analizie przyjmowane są następujące założenia:

a) Strumień znajduje się całkowicie w rdzeniu i wszystkie zwoje obejmują cały strumień magnetyczny.

b) Gęstość strumienia (indukcja magnetyczna) jest stała na całym przekroju rdzenia.

Przykład. Oblicz strumień Φ, gęstość strumienia B i natężenie pola magnetycznego H w obwodzie magnetycznym obok z rdzeniem o przenikalności $\boldsymbol{\mu}_r$ = 1000. Obliczamy stosując założenia, że pole w rdzeniu jest jednorodne i nie opuszcza rdzenia – przenika wszystkie zwoje.



Rozwiązanie.

Siła magnetomotoryczna $F_m = Ni = 500 \times 0{,}1$ A = 50 Az (albo 50 A).

Średnia droga strumienia magnetycznego $l = 4 \times 0{,}09$ m = 0,36 m.

Pole przekroju poprzecznego rdzenia A = 0,01 m × 0,01 m = 0,0001 m²

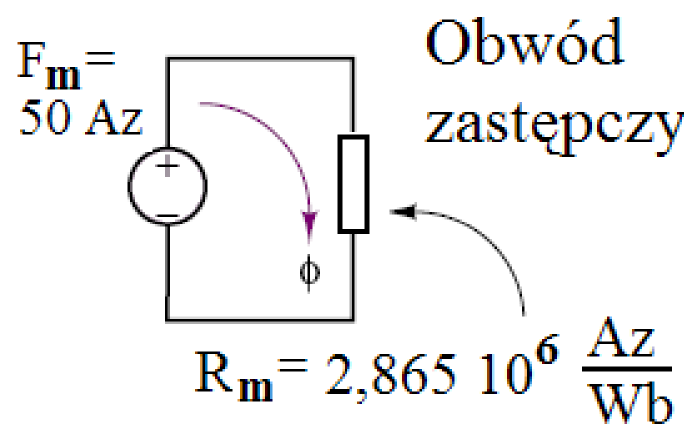
Reluktancja $R_m = \boldsymbol{l/(\mu A)} = \boldsymbol{l/(\mu_r \mu_0 A)} = 0{,}36/(1000 \times 4\pi\times10^{-7} \times 0{,}0001) = 2{,}865\ 10^6$ **Az/Wb**.

Strumień magnetyczny $\Phi = F_m/R_m$ = (50 Az)/(2,865 10^6 Az/Wb) = 1,75 10^{-5} Wb.

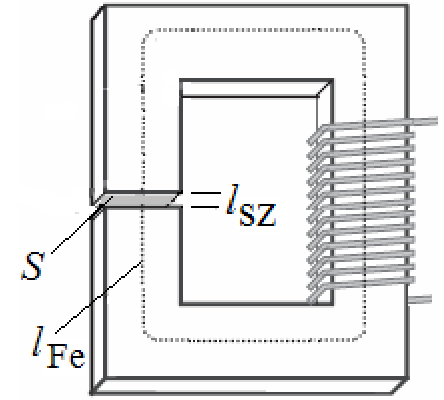
Gęstość strumienia B = Φ/A = (1,75 10^{-5} Wb)/(0,0001 m²) = 0,175 Wb/m² = 0,157 T.

Natężenie pola magnetycznego $H = B/\mu = B/\boldsymbol{\mu_r\mu_0}$ = (0,175 Wb/m²)/(1000 × 4π×10^{-7} H/m) = 139 Az/m.

Zastosowane uproszczenia jak widać pozwalają na łatwe wyliczenie przybliżonych wielkości i analizę układu. W projektowaniu wymagana jest jednak większa precyzja i rozwiązywanie równań 3-wymiarowych.



Przykład. Oblicz prąd w uzwojeniu zawierającym **95** zwoi, zapewniający amplitudę indukcji magnetycznej (przebiegu sinusoidalnego) w szczelinie powietrznej $\mathbf{B_{sz} = 0{,}82\ T}$ w pewnej maszynie elektrycznej. W obliczeniach założyć, że przenikalność rdzenia magnetycznego jest $\mu_{Fe} = \infty$ nieskończona w porównaniu z przenikalnością powietrza $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$H/m. Szerokość szczeliny wynosi 3,5 mm. Obliczyć reluktancję szczeliny przy a = b = 0,1 m.

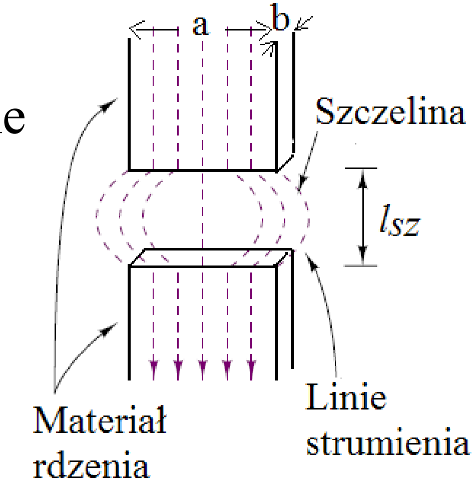


Rozwiązanie.

Przy założeniu $\mu_{Fe} = \infty$, reluktancja rdzenia wynosi zero, podobnie spadki potencjału magnetycznego $H_n l_n$ w obszarze rdzenia są równe zero. Zatem cała siła magnetomotoryczna NI = Θ odkłada się w szczelinie: $\mathbf{NI = H_{sz} l_{sz} = (B_{sz}/\mu_{sz}) l_{sz}} =$

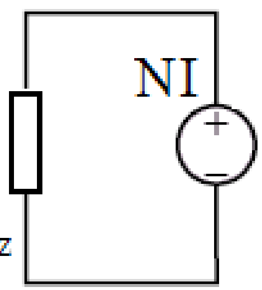
$(0{,}82/(4\pi 10^{-7}))\ (3{,}5\ 10^{-3})$ A (lub Az)

$\mathbf{I = \Theta/N} = (0{,}82/(4\pi 10^{-7}\times 95))\ 3{,}5 10^{-3} = 24$ A - jest to amplituda natężenia prądu.



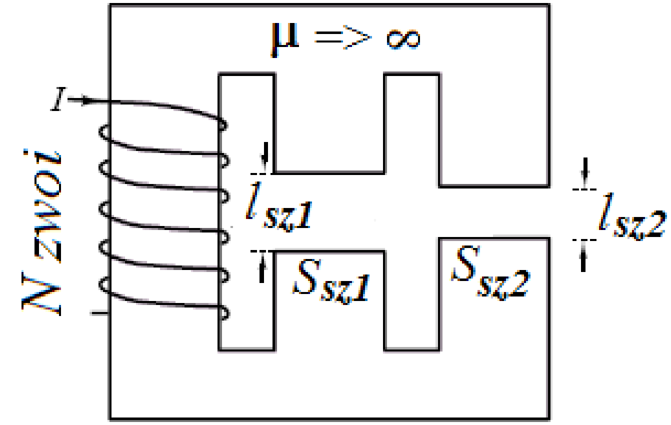
Aby obliczyć reluktancję szczelin należy oszacować efektywny jej przekrój, w tym celu przyjmuje się, że przekrój szczeliny $S'_{sz} = (a + l_{sz}) \times (b + l_{sz})$ -> $\mathbf{R_{m\,sz} = l_{sz}/(\mu_0 S'_{sz})}$

$U_{m.sz} = H_{sz} l_{sz} = (B_{sz}/\mu_{sz}) l_{sz}$



W praktyce od około 70 do 90% całej siły magnetomotorycznej spada w szczelinie, zatem dla dokładnych obliczeń jednak należy uwzględniać pozostałe 10 do 30% spadku mającego miejsce w rdzeniach maszyn elektrycznych.

Przykład. Mając układ magnetyczny z dwoma szczelinami jak na rysunku, przedstawić układ zastępczy.



Rozwiązanie.

Przy założeniu $\boldsymbol{\mu} \Rightarrow \infty$, reluktancja rdzenia jest do zaniedbania – wynosi zero.

Siła magnetomotoryczna F_m = SMM = Ni,

Reluktancje wynoszą:

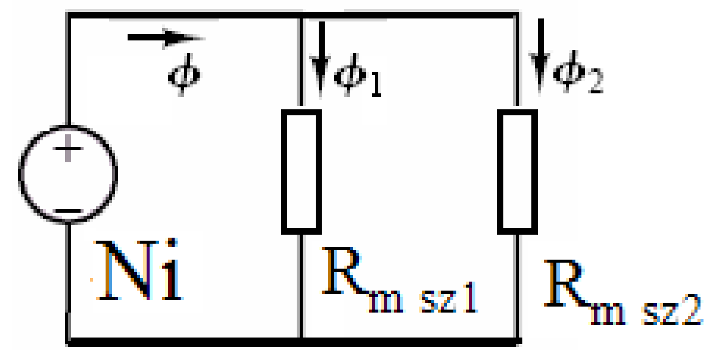
$R_{m\ sz1} = l_{sz1}/(\boldsymbol{\mu}_0 S_{sz1})$,

$R_{m\ sz2} = l_{sz2}/(\boldsymbol{\mu}_0 S_{sz2})$,

Strumień magnetyczny w szczelinie 1:

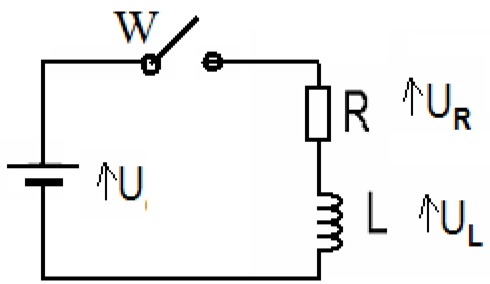
$\Phi_1 = Ni/R_{m\ sz1} = Ni\boldsymbol{\mu}_0 S_{sz1}/l_{sz1}$

$\Phi_2 = Ni/R_{m\ sz2} = Ni\boldsymbol{\mu}_0 S_{sz2}/l_{sz2}$



Całkowity strumień: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

Przykład. Posługując się układem na rysunku i prawami Kirchhoffa wyprowadzić wzór na energię gromadzoną w indukcyjności L.



Rozwiązanie.

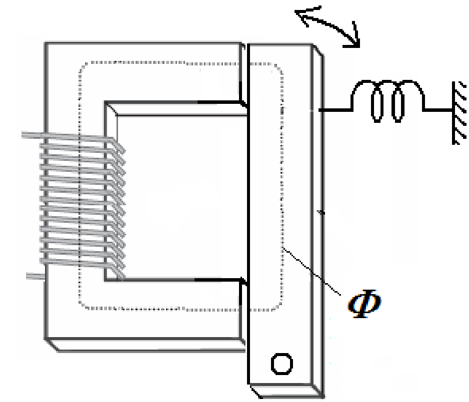
Po włączeniu wyłącznika, z II prawa KIrchhoffa mamy: $\mathbf{U = Ri + L(di/dt).}$ Mnożąc tę równość stronami przez „idt" otrzymujemy: $\mathbf{Uidt = Ri^2dt + Lidi.}$ Iloczyn Uidt jest porcją energii traconej przez źródło napięcia U w czasie dt, iloczyn $\mathbf{Ri^2dt}$ jest energią zamienianą na ciepło w rezystorze R w czasie dt, iloczyn **Lidi** jest energią gromadzoną w indukcyjności L w czasie dt. Całkowitą energię zgromadzoną w polu magnetycznym cewki W_L otrzymamy całkując iloczyn **Lidi** od zerowej wartości prądu do wartości ustalonej $\mathbf{I = U/R.}$

$$W_{\mathbf{L}} = \int_0^I Lidi = \frac{LI^{\mathbf{2}}}{2}$$

Wymiar $[W_L] = [L][I^2] = 1(Vs/A)\ A^2 = 1VAs = 1J$.

Podobieństwo wzoru na energię W_L do wzorów na energię kinetyczną w układach mechanicznych $\mathbf{mv^2/2}$ lub $\mathbf{J\omega^2/2}$ jest podstawą do modelowania analogowego (symulacji) układów mechanicznych za pomocą układów elektrycznych. Indukcyjność w obwodzie elektrycznym jest elementem wykazującym inercję (bezwładność).

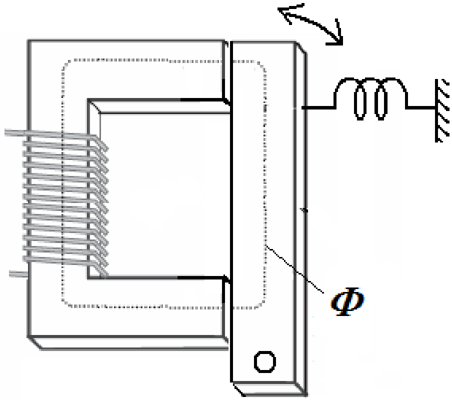
Siła przyciągania elektromagnesu



W wielu urządzeniach elektromagnesy są stosowane w celu wytworzenia odpowiedniej siły. Spotykamy elektromagnesy w podnośnikach elektromagnetycznych służących do podnoszenia ciężarów czy w stycznikach i przekaźnikach do przesterowania styków. Podczas przemieszczania zwory wykonywana jest praca z użyciem pewnej siły F.
Praca ta równa jest zmianie energii pola magnetycznego elektromagnesu.
Energia pola magnetycznego wyraża się przez: $W_m = Li^2/2$.
Indukcyjność z definicji występuje w wyrażeniu na indukowaną siłę elektromotoryczną $E = -L(di/dt)$, ale też z prawa Faradaya otrzymujemy $E = -N(d\Phi/dt)$, gdzie N jest liczbą zwoi otaczających strumień Φ. Z analizy obwodów magnetycznych pamiętamy, że $\Phi = Ni/R_m = Ni\mu S/l$ dla prostego układu magnetycznego bez szczeliny.
Zatem możemy zapisać $E = -L(di/dt) = -N(d\Phi/dt) = -(N^2\mu S/l)(di/dt)$, z czego wynika, że $L = N^2\mu S/l$. Więc energia pola magnetycznego daje się zapisać jako $W_m = (N^2\mu S/l)\, i^2/2$. Wykorzystajmy jeszcze związek między indukcją magnetyczną B a prądem i : $\mu H = \mu Ni/l$; $B = \mu Ni/l$ i wstawmy za i wyrażenie $i = Bl/(\mu N)$ do wzoru na W_m. $W_m = (N^2\mu S/2l)\,(Bl)^2/(\mu N)^2 = B^2Sl/(2\mu) = B^2V/(2\mu) = HBV/2.$ Warto odnotować, że energia pola magnetycznego to iloczyn B^2 *i objętości przestrzeni, w której rezyduje indukcja B, podzielony przez* 2μ.. Aby z tego wyrażenia obliczyć siłę zastosujmy rozumowanie: $dW = (dW/dl)dl = Fdl$: $F = dW_m/dl$

$$F \neq B^2S/(2\mu_0) \text{ bo ze zmianą } l_{sz} \text{ zmienia się } B!!!$$

Energia elektromagnesu gdy szczelina jest zerowa.



$$W_m = Li^2/2$$

$$E = -L(di/dt) \qquad E = -N(d\Phi/dt) \qquad \Phi = Ni/R_m = Ni\mu S/l$$

$$E = -L(di/dt) = -N(d\Phi/dt) = -(N^2\mu S/l)(di/dt)$$

$$L = N^2\mu S/l.$$

$$\boxed{W_m = (N^2\mu S/l)\ i^2/2}$$

$$H = Ni/l; \quad B = \mu Ni/l \rightarrow i = Bl/(\mu N)$$

$$W_m = (\cancel{N^2}\mu S/2l)\ (Bl)^2/(\mu \cancel{N})^2 = B^2Sl/(2\mu) = \underline{B^2V/(2\mu)} = HBV/2$$

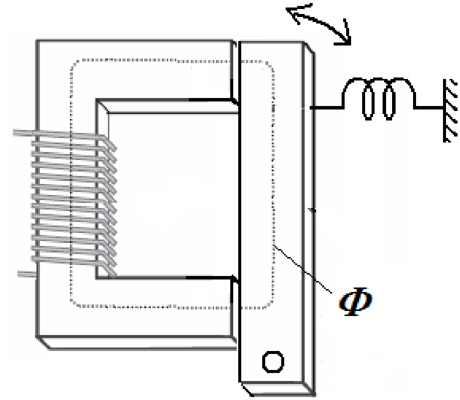
$$\boxed{W_m = B^2V/(2\mu)}$$

$$dW = (dW/dl)dl = Fdl \rightarrow F = dW_m/dl$$

Przykład;

Wyprowadzić wyrażenie na siłę elektromagnesu.

Szczelina jest niezerowa.



$$W_m = Li^2/2$$

$$E = -L(di/dt) \qquad E = -N(d\Phi/dt) \qquad \Phi = Ni/R_m$$

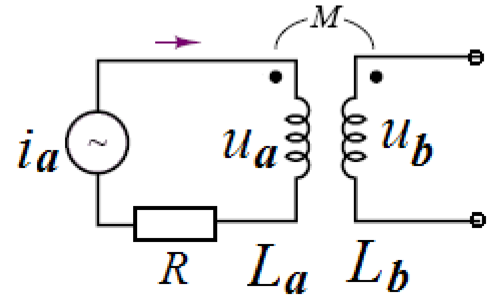
$$\underbrace{E = -L(di/dt) = -N(d\Phi/dt) = -(N^2/R_m)}(di/dt) \qquad R_m = l_{rdz}/\mu S + l_{sz}/\mu_o S$$

$$L = N^2/(l_{rdz}/\mu S + l_{sz}/\mu_o S)$$

$$W_m = N^2/(l_{rdz}/\mu S + l_{sz}/\mu_o S)\, i^2/2$$

$$F = dW_m/dl_{sz} = \frac{-N^2 i^2/2}{(l_{rdz}/\mu S + l_{sz}/\mu_o S)^2 \mu_o S}$$

Indukcja wzajemna



określa sprzężenie magnetyczny między uzwojeniami powodowane ich wzajemną bliskością i orientacją.

Indukcja wzajemna oznaczana jest symbolem M i zdefiniowana równością:

$$u_b = M di_a/dt$$

Kropki na rysunku (i na schematach) oznaczają końcówki cewek o zgodnej polaryzacji (zgodnej fazie napięć).

W cewce, gdy płynie przez nią prąd zmienny, indukowane jest też napięcie za sprawą samoindukcji.

$$u_a = L_a di_a/dt$$

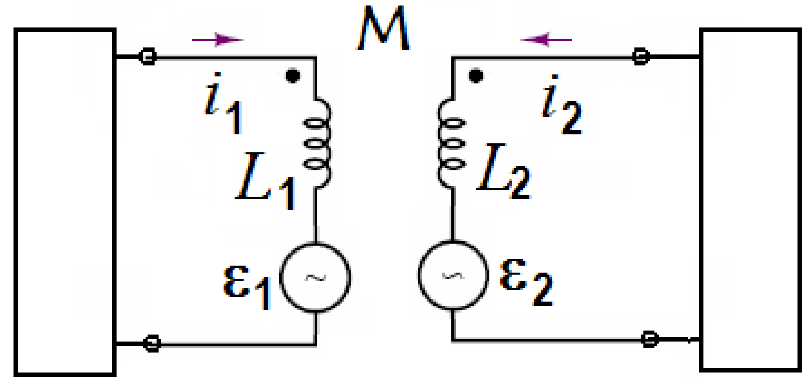
Zatem napięcie (Theveninowskie) wymuszające prąd i_a gdy zaciski uzwojenia wtórnego są rozwarte spełnia równość:

$$u_{Ta} = i_a R + L_a di_a/dt.$$

Gdy w uzwojeniu wtórnym popłynie prąd to napięcie wymuszające ma do pokonania jeszcze jedno obciążenie i w zakresie liniowym całego układu mamy

$$u_{Ta} = iR + L_a di_a/dt + M di_b/dt.$$

Czy można analizować układy sprzężone przy pomocy układów zastępczych? Owszem, można to robić stosując tzw. źródła zależne (źródła sterowane):



$$\varepsilon_1 = -L_1 di_1/dt \pm M di_2/dt$$

$$\varepsilon_2 = -L_2 di_2/dt \pm M di_1/dt$$

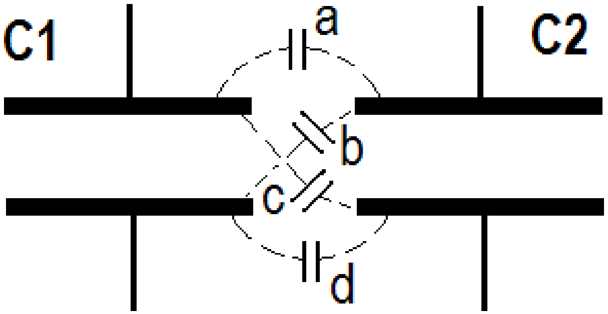
Pierwszy człon po prawej stronie obu równań pochodzi od samoindukcji danej cewki, a drugi od jej indukcyjności wzajemnej z drugą cewką. Znak drugiego członu, zależnie od sposobu w jaki strumień magnetyczny jednej cewki przenika drugą. Oczywiście w obszarze liniowym napięć i prądów analizowanego układu dopisywane równania (np. jak zależy dana siła EM od prądu w innej części układu) są liniowe.

Dla przebiegów sinusoidalnych, w zapisie zespolonym mamy zamianę pochodnej na mnożenie:

$$\pm M di_2/dt = \pm j\omega M i_2$$

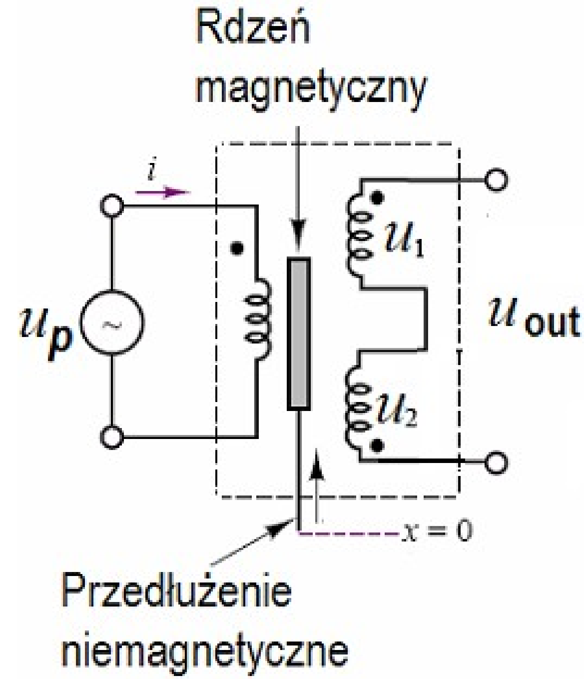
$$\pm M di_1/dt = \pm j\omega M i_1$$

Oprócz indukcyjności wzajemnej mogą też występować pojemności wzajemne. Taką sytuację można spotkać w wiązkach przewodów elektrycznych czy w lampach elektronowych, gdzie występuje wiele elektrod jedna obok drugiej. Jeżeli na jedną z takich elektrod wprowadzany jest ładunek elektryczny to jego pole wyindukuje pewien rozkład ładunku na pozostałych i będzie wpływać na ich potencjały elektryczne.



W układach wysokich częstotliwości takie pojemności mogą stanowić małą impedancję (1/jωC i znaczną konduktancję: jωC) odpowiedzialną za przenikanie sygnałów pomiędzy obwodami elektrycznymi. Innymi słowy pojemności wzajemne (czasem bardzo niepożądane) mogą sprzęgać ze sobą odizolowane od siebie obwody elektryczne.

Liniowy sensor położenia z transformatorem różnicowym.

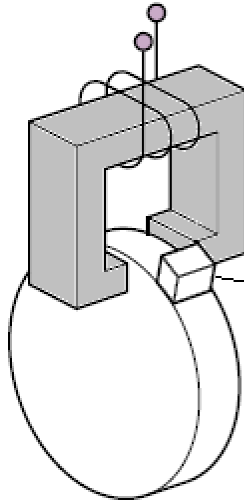


W układzie obok od położenia ruchomego rdzenia zależą wartości indukcji wzajemnych dwóch uzwojeń wtórnych z uzwojeniem pierwotnym - M_1 i M_2.

Uzwojenia wtórne 1 i 2 są połączone szeregowo ale w taki sposób, że ich siły elektromotoryczne są w przeciwfazie: $u_{out} = (M_1 – M_2)di/dt$.

Gdy w uzwojeniu pierwotnym mamy wymuszenie sinusoidalne to amplituda sygnału wyjściowego u_{out} będzie zależała od położenia rdzenia. W pozycji zerowej u_{out} będzie równe zeru. Sensory położenia tego typu są projektowane tak aby $M_1 – M_2$ było liniową funkcja przemieszczenia.

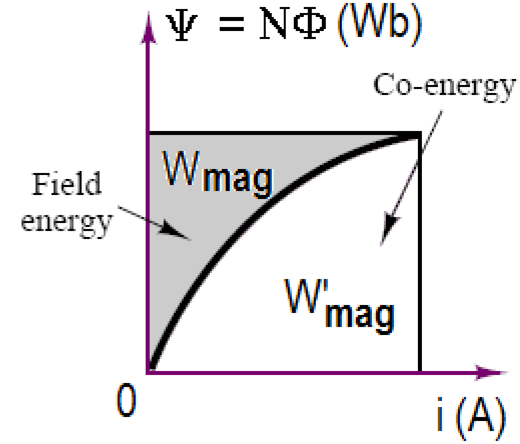
Reluktancyjny sensor przemieszczenia i prędkości.



Bardzo prostym w działaniu jest sensor w postaci magnesu trwałego z nawiniętym na nim uzwojeniem. Kiedy ferromagnetyczne klocki przelatują między biegunami magnesu trwałego zmienia się strumień magnetyczny. Dzieje się tak ponieważ reluktancja obwodu magnetycznego maleje gdy klocek ferromagnytyczny zmniejsza rozmiary szczeliny i rośnie gdy klocek opuszcza bieguny magnesu trwałego. W uzwojeniu pojawia się siła elektromotoryczna zgodnie z prawem Faradaya: $e = -d\Phi/dt$.

Energia i ko-energia

W praktyce często (zwłaszcza w zakresie większych natężeń pola magnetycznego) zależność pomiędzy strumieniem skojarzonym Ψ a natężeniem prądu jest nieliniowe. Wynika to z faktu, że materiały ferromagnetyczne (z których wykonywane są rdzenie magnetyczne) mają w tym względzie nieliniowe charakterystyki.



Nieliniowa zależność między strumirniem skojarzonym a natężeniem prądu.

W konsekwencji **indukcyjność L**, nie **może być stała**, ale zależy od natężenia pola magnetycznego i proste wyrażenie U = Ldi/dt ze stałym L nie może być stosowane swobodnie. Wówczas dogodniej jest opierać analizę na bilansie energetycznym.

Energia magnetyczna W_{mag} możemy wyrazić jako całkę z mocy $p = ei$ – gdzie siła elektromotoryczna $e = d\Psi/dt$, $e = d(k_w N\Phi)/dt$, czyli:

$$W_{mag} = \int e i dt' \quad \text{lub:}$$

$$W_{mag} = \int (d\Psi/dt) i dt' = \int i d\Psi'$$

$$W'_{mag} = i\,\Psi - W_{mag}$$ – to dopełnienie nazywamy ko-energią

Przykład. Wyliczyć energię i ko-energię oraz przyrostową liniową indukcyjność L_{Δ} cewki z rdzeniem**.** Wyliczyć również napięcie na zaciskach cewki mając dane: zależność między prądem a strumieniem skojarzonym Ψ w postaci $i = \Psi + 0{,}5\,\Psi^2$; nominalną wartość $\Psi = \Psi_o = 0{,}5$ Vs; $R = 1\ \Omega$; $i(t) = 0{,}625 + 0{,}01\sin(400t)$.

Rozwiązanie. 1) Energia i ko-energia: $W_{mag} = \int i d\Psi' = \int(\Psi + 0{,}5\Psi^2)d\Psi' = \Psi^2/2 + \Psi^3/6$, podstawiając do tego wyrażenia nominalną wartość strumienia skojarzonego $\Psi_0 = 0{,}5$ Vs otrzymujemy:

$W_{mag}(\Psi = \Psi_0) = 0{,}5^2/2 + 0{,}5^3/6 = 0{,}1458$ J.

$W'_{mag} = i\Psi - W_{mag}$, $i = \Psi_0 + 0{,}5\,\Psi_0^2 = 0{,}5 + 0{,}5(0{,}5)^2 = 0{,}625$ A. Zatem

$W'_{mag} = 0{,}625(0{,}5) - 0{,}1458 = 0{,}1667$ J.

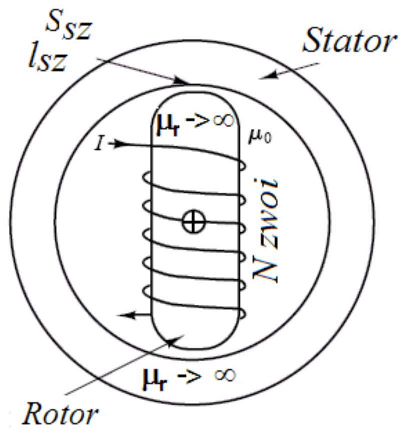
2) Indukcyjność przyrostowa $L_{\Delta} = d\Psi/di = 1/(di/d\,\Psi) = 1/[(d/d\Psi)(\Psi + 0{,}5\Psi^2) = 1/(1 + \Psi)$ w otoczeniu $\Psi_0 = 0{,}5$ Vs, $L_{\Delta} = 1/(1 + 0{,}5) = 0{,}667$ H (w otoczeniu $i = 0{,}625$ A).

3) $u = iR + L_{\Delta}di/dt = [0{,}625 + 0{,}01\sin(400t)]\times 1 + 0{,}667 \times 4\cos(400t) = 0{,}625 + 0{,}01\sin(400t) + 2{,}667\sin(400t + 90°) = 0{,}625 + 2{,}667\sin(400t + 89{,}8°)$.

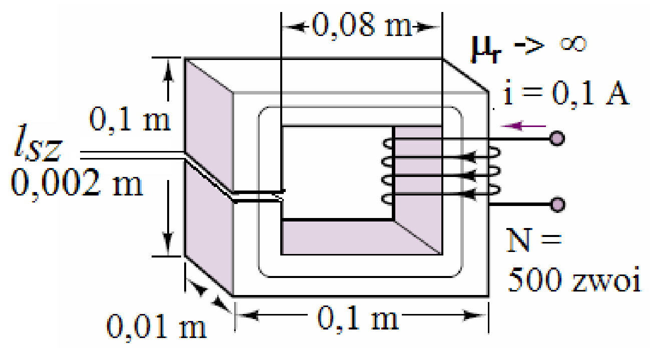
Ten przykład ilustruje możliwość linearyzacji równań w zagadnieniach, w których zmiany pewnej wielkości (tu prądu $\Delta i = 0{,}01$ A) są małe w porównaniu do wartości stałej wokół której te zmiany zachodzą (tu $i_0 = 0{,}625$ A).

Elektrotechnika i elektronika Lista 05.

1) Wychodząc z wyrażeń na napięcie na zaciskach uzwojenia: $u = Nd\Phi/dt$ i $u = Ldi/dt$ pokazać, że $L = N^2/R_m$. Gdzie reluktancja $R_m = Ni/\Phi$.



2) Mając dane układu magnetycznego pokazanego obok:
$N = 1000$ zwoi, $i = 10$ A, $\mu_r \to \infty$, $l_{sz} = 0{,}01$m, $S_{sz} = 0{,}1$ m^2.
Oblicz strumień magnetyczny i gęstość strumienia w szczelinie.



3) Określić indukcyjność i magazynowaną energię magnetyczną w układzie obok.

4) Zakładając, że w szczelinie układu z zadania 3 występuje indukcja magnetyczna (gęstość strumienia magnetycznego) $B(t) = 0{,}6 \sin(314t)$ Wb/m^2, Oblicz indukowane napięcie na uzwojeniu.

5) Oblicz siłę z jaką układ z zadania 3 „stara się” zmniejszyć szczelinę.