Uniwersytet Wrocławski

Wydział Fizyki i Astronomii
Instytut Fizyki Doświadczalnej

pl. M. Borna 9
50-204 Wrocław
tel. +48 71 375 93 02, +48 71 328 73 65
fax +48 71 328 73 65
e-mail: sekr@ifd.uni.wroc.pl
www.ifd.uni.wroc.pl

Elektrotechnika i elektronika (konspekt)

Franciszek Gołek (golek@ifd.uni.wroc.pl)

www.pe.ifd.uni.wroc.pl

Wykład 3.

Obwody prądu sinusoidalnego

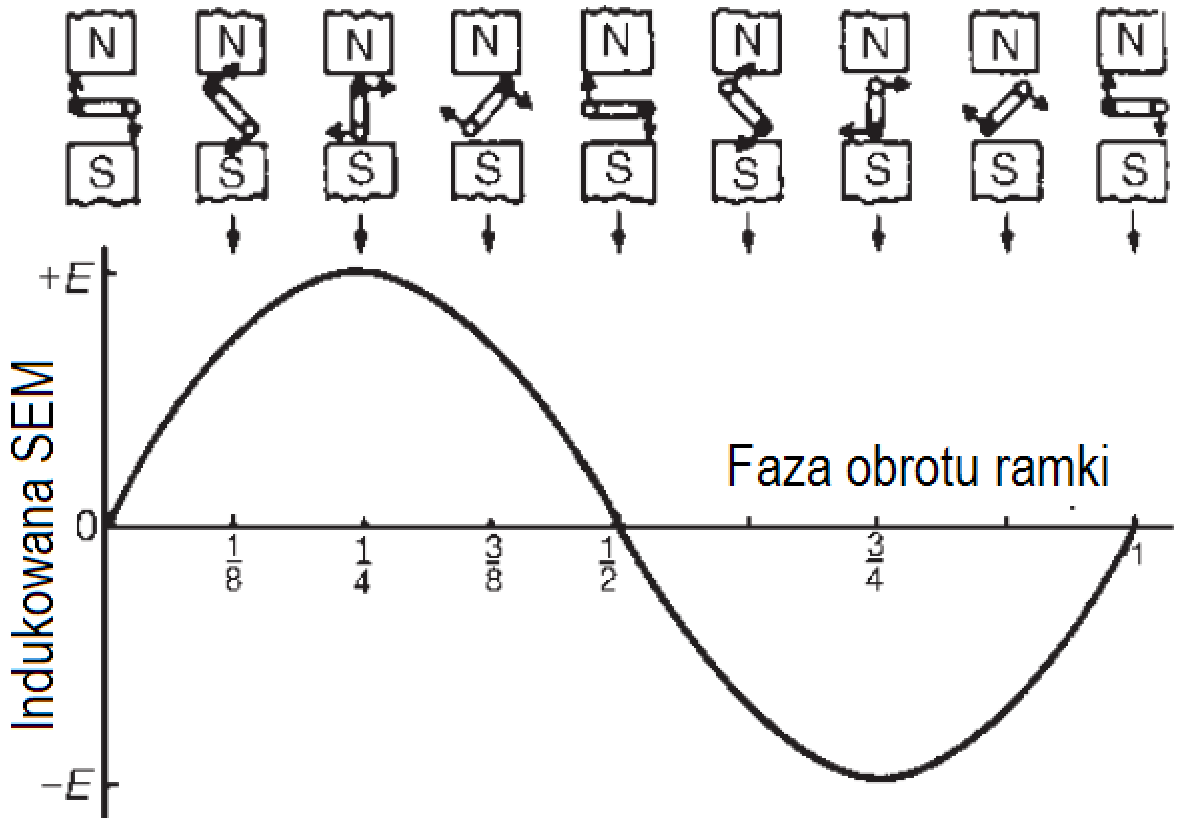
Obecnie powszechnie dostępna energia elektryczna jest produkowana **w postaci sinusoidalnego napięcia** wymuszającego sinusoidalne natężenie prądu elektrycznego.

Częstotliwość tego zmiennego (mówimy też przemiennego) napięcia wynosi 50 Hz w Europie lub 60 Hz w Ameryce północnej.

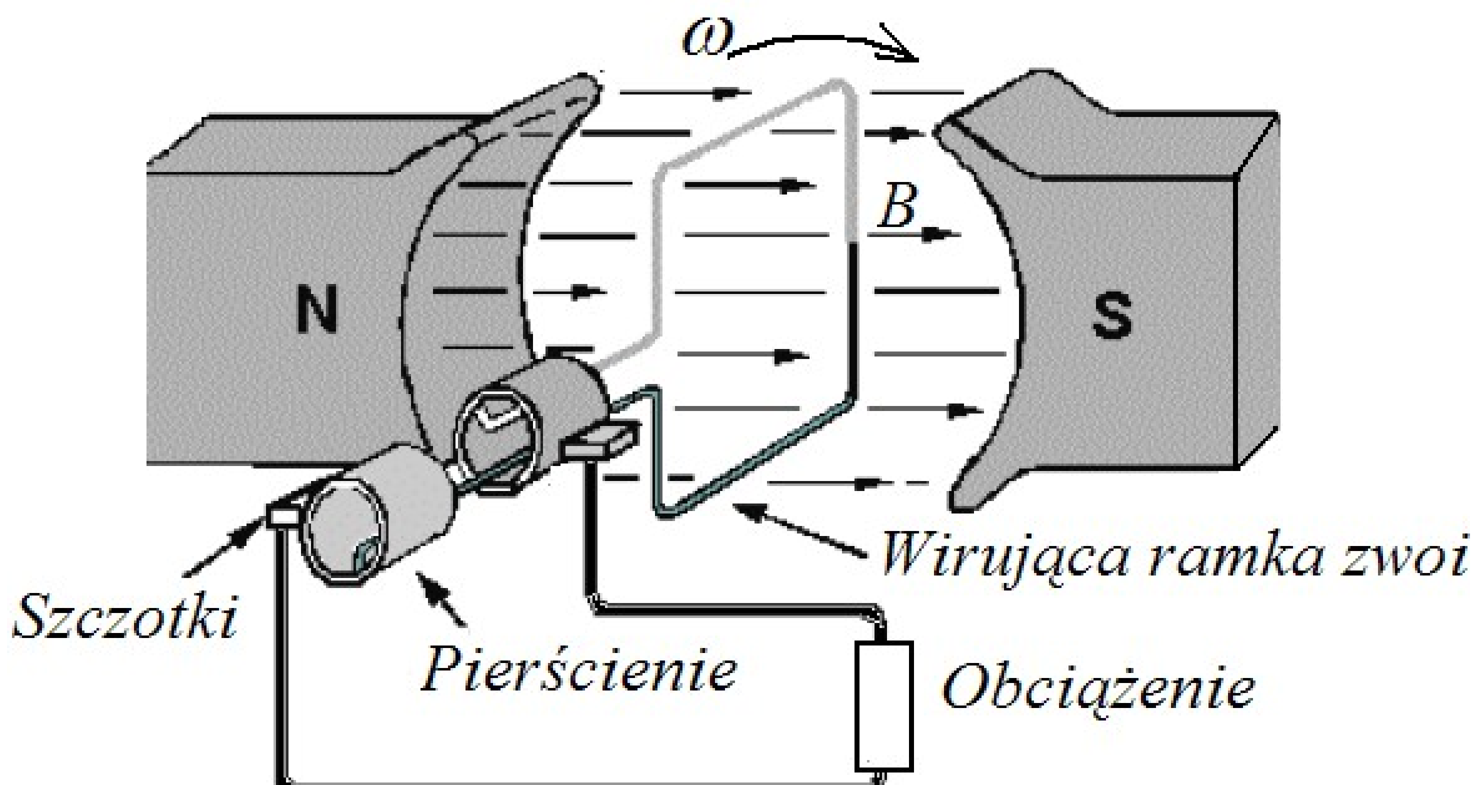
Dzięki transformatorom łatwo można zmieniać wielkość amplitud napięć i prądów zmiennych.

Energia elektryczna w postaci dużych zmiennych napięć przy małych natężeniach prądów jest łatwa do ekonomicznego transportu przy użyciu sieci linii transmisyjnych krajowego systemu energetycznego. Wszędzie gdzie pożądane jest napięcie stałe stosowane są układy konwersji nazywane prostownikami.

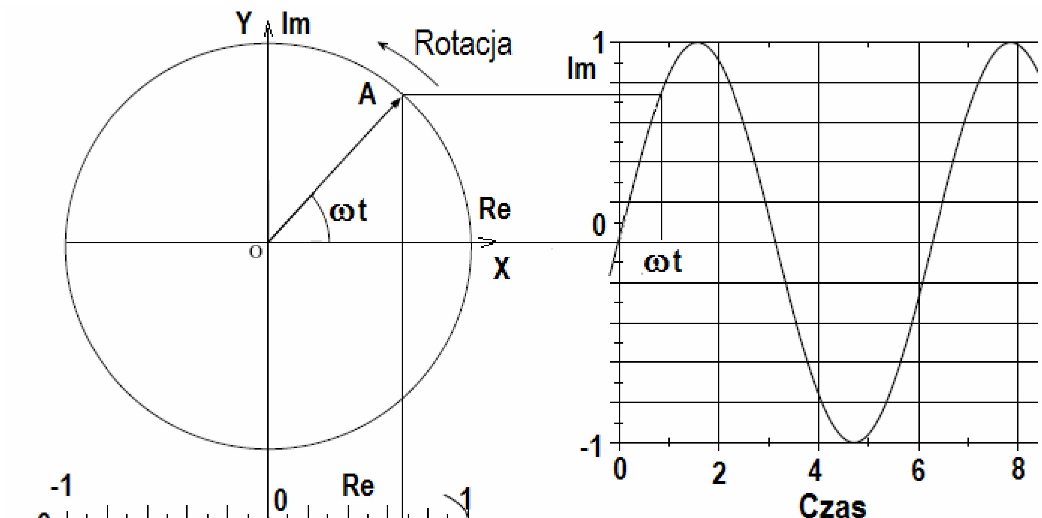
Generowanie napięć zmiennych w elektrowniach polega na zamianie innych rodzajów energii na energię elektryczną z wykorzystaniem prawa Faradaya $\nabla \times E = -dB/dt$ czyli SEM = - $d\Phi/dt$ (jedno z równań Maxwella). Dostępną energię (wiatrową, wodną, jądrową czy cieplną) wykorzystuje się do wirowania odpowiednimi zwojnicami w silnym polu magnetycznym.

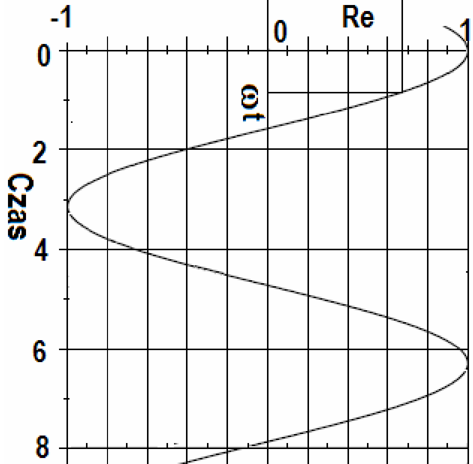


Idea źródła napięcia sinusoidalnego: Prostokątna ramka z przewodów elektrycznych (uzwojenie) wiruje ze stałą prędkością kątową ω w stałym polu magnetycznym o indukcji **B**. Końce ramki połączone są z pierścieniami, które ocierają się (ślizgają) o dociskane sprężynowo szczotki. Oznaczając przez „A" pole powierzchni obejmowanej ramką możemy określić zależność czasową strumienia Φ przenikającego ramkę jako: $\Phi = BA\cos(\omega t)$. Generowana siła elektromotoryczna (SEM) $e = -d\Phi/dt = \omega BA\sin(\omega t) = E_{max}\sin(\omega t)$

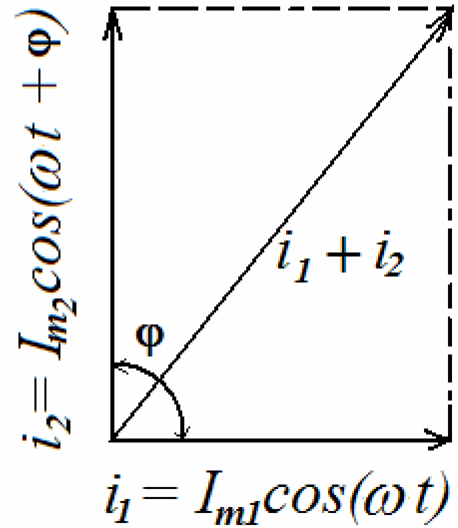


W elektrotechnice podstawowym przebiegiem napięć i prądów (wymuszeń i skutków) jest przebieg sinusoidalny. Takie przebiegi są generowane przez tradycyjne, wirujące maszyny elektryczne zwane generatorami prądu zmiennego. Z podstaw trygonometrii wiadomo, że przebieg sinusoidalny (rzędne sinusoidy) można otrzymać przez rzutowanie promienia koła trygonometrycznego, wirującego ze stałą prędkością katową **ω** na nieruchoma oś.





Wirujący wektor i jego projekcje na osie X i Y (lub Re i Im).



Reprezentację wektorową przebiegów sinusoidalnych nazywamy wykresem wskazowym lub wykresem wektorowym. Użyte wektory nazuwamy fazorami lub wskazami.

Liczby zespolone

Dysponując tylko liczbami rzeczywistymi mamy problem z rozwiązaniem takich równań jak np.:

$X^2 + 1 = 0$.

Jeżeli jednak za X podstawimy coś co nie jest liczbą rzeczywistą: $\sqrt{-1}$, to podnosząc do kwadratu tę dziwną wielkość otrzymujemy liczbę rzeczywistą -1. Zatem to coś spełnia równanie:

$X^2 + 1 = 0$.

Podobnie możemy podstawić za X wartość $-\sqrt{-1}$.

Jeżeli tę wielkośc $\sqrt{-1}$ oznaczymy przez „j” to z łatwością rozwiążemy wiele innych rónań, przykładowo równanie $X^2 + 9 = 0$ spełniają rozwiązania: X = - 3j oraz +3j.

W elektronice stosujemy symbol: $j = (-1)^{0.5}$.

chociaż w matematyce używany jest symbol $i = (-1)^{0.5}$.

Liczby i funkcje zespolone w elektrotechnice i elektronice.

Liczby zespolone mają postać dwuskładnikową (zespoloną): $Z = x + jy$. Gdzie $j = \sqrt{-1}$ jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby -1. Taka notacja przypomina zapis położenia punktu na płaszczyźnie przy pomocy dwóch (równoprawnych) współrzędnych: $Z = (x, y)$. W dziedzinie liczb zespolonych jest jednak pewna asymetria np. kwadrat liczby czysto rzeczywistej $(x + j0)$ jest wielkością czysto rzeczywistą dodatnią $(x^2 + j0)$ a kwadrat liczby czysto urojonej $(0 + jy)$ jest wielkością czysto rzeczywistą ujemną $(-y^2 + j0)$ bo $j^2 = -1$. Dlatego liczby zespolone traktujemy jako zapis położenia punktu na <u>płaszczyźnie zespolonej</u>. Wielkości zespolone (liczby i funkcje) są wyjątkowo udaną abstrakcją stosowaną w opisie oscylacyjnych przebiegów napięć i prądów w elektryczności oraz elektronice. Dobrym tego przykładem są tzw. wykresy wskazowe, które zastosujemy przy analizie układów RLC zasilanych napięciami sinusoidalnymi. <u>Zapis przebiegów sinusoidalnych w postaci funkcji zespolonych jest niezastąpiony przy analizie zależności amplitudowych i fazowych.</u>

Przypomnijmy równość Eulera:

$$\mathbf{e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)}$$

oraz równoważność formuł:

$$\mathbf{Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi))}$$

z obrazem punktu wirującego na płaszczyźnie zespolonej z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ - zwaną pulsacją. Przykładowo zapis iloczynu prądu i zawady:

$$\mathbf{U = I \times Z = Ie^{j(\omega t + \alpha)}} \times Z\mathbf{e^{j\beta}} = Z\mathbf{Ie^{j(\omega t + \alpha + \beta)}} = U\mathbf{e^{j(\omega t + \theta)}}$$

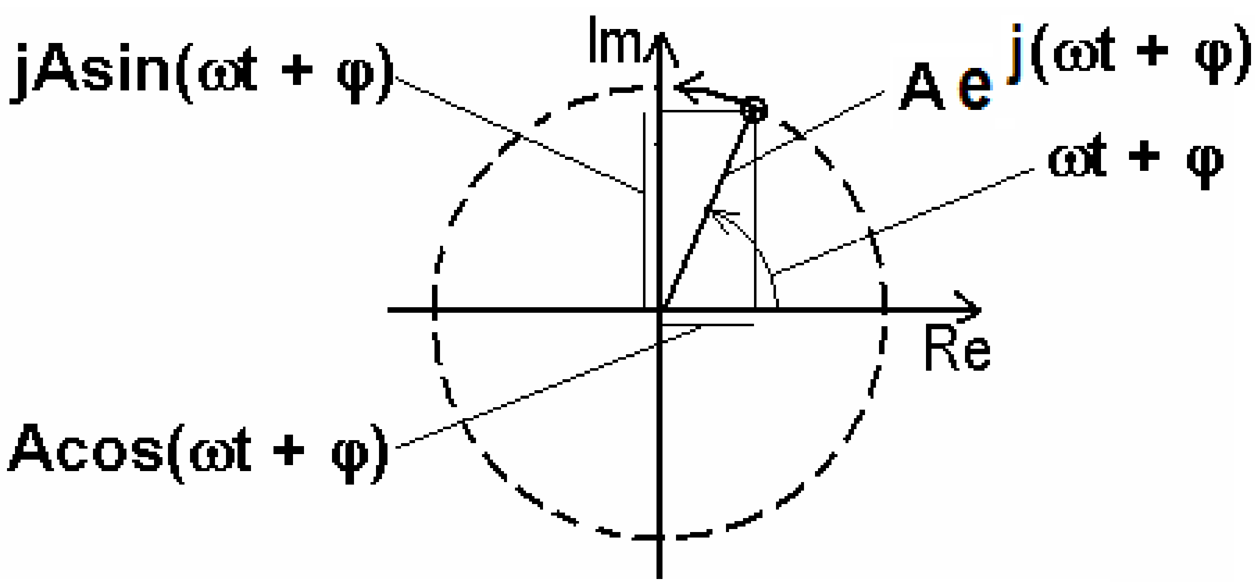
doskonale ilustruje relacje

amplitudowe $U = IZ$ i fazowe $\theta = \alpha + \beta$

oraz zależności faz od czasu: np.

faza **U** = argument **U** = $\omega t + \theta$.

Zatem dowolną wielkość np. napięcie $u = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ o amplitudzie $A = U_{max}$ możemy rozumieć jako część rzeczywistą napięcia zapisanego w postaci zespolonej $u_z = U_{max}e^{j(\omega t + \varphi)}$, a napięcie w postaci zespolonej przedstawiamy na wykresie wskazowym jako wektor o module U_{max} tworzącym z osią odciętych kąt $\boldsymbol{\omega t + \varphi}$.



http://faraday.ee.emu.edu.tr/EENG224/lecture_notes.htm
http://staff.southwest.tn.edu/kfoster/links_4.htm

Kondensatory w obwodach elektronicznych, podobnie jak oporniki i cewki są elementami biernymi, nie mogą wzmacniać (zwiększać moc) sygnału elektrycznego. Kondensator jest dwójnikiem (dwa zaciski) i składa się z dwóch okładzin metalowych o dużej powierzchni odizolowanych dielektrykiem o dużej przenikalności elektrycznej. Stosowane konstrukcje i materiały są rozmaite i nadal ulepszane. Kondensatory, podobnie jak rezystory należą do grupy podstawowych elementów elektroniki. Ładunek i napięcie na idealnym kondensatorze spełniają następujący związek:

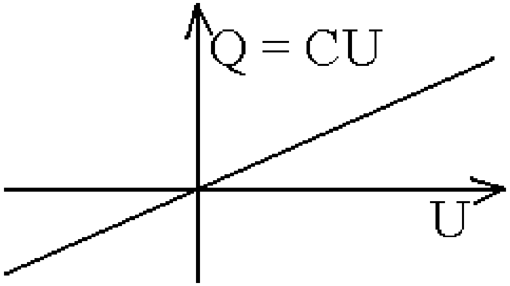
$$Q = CU.$$

Różniczkując obie strony „po czasie” otrzymujemy

$$dQ/dt = CdU/dt.$$

dQ/dt jest oczywiście prądem I.

Z równości $I = CdU/dt$ widać, że stały prąd (ładowania) oznacza stałe tempo zmian napięcia na kondensatorze.



Prąd jest wprost proporcjonalny nie do napięcia, jak dla opornika, lecz do szybkości jego zmian.

<u>Brak proporcjonalności między wartościami chwilowymi napięcia i prądu wyklucza zastosowanie prawa Ohma w dziedzinie liczb rzeczywistych.</u>

<u>Dla amplitud lub wartości skutecznych jednak prawo Ohma obowiązuje, a prawa Kirchhoffa NIE!!!</u>

<u>Okazuje się, że dla wartości chwilowych pochodną można zastąpić mnożeniem w sytuacji, gdy mamy do czynienia z przebiegami sinusoidalnymi i ich zapisem w dziedzinie liczb zespolonych.</u>

Na elementach obwodu prądu sinusoidalnie zmiennego występują napięcia dające się zapisać jako $U = U_{max}\cos(\omega t+\varphi)$. Funkcje takie możemy traktować jako części rzeczywiste periodycznych funkcji zespolonych $\mathbf{U} = U_{max}e^{j(\omega t+\varphi)}$ czyli $U = \mathrm{Re}(\mathbf{U} = U_{max}e^{j(\omega t+\varphi)})$. Gdy tak zapisane napięcie pojawi się na kondensatorze to z relacji między prądem i napięciem dla kondensatora:

$$\mathbf{I} = Cd\mathbf{U}/dt$$

wynika, że dla prądów zmiennych impedancja kondensatora czyli współczynnik („proporcjonalności") między prądem i napięciem wyraża się funkcją zespoloną:

$$\mathbf{Z_c} = \mathbf{X_c} = 1/j\omega C.$$

Podstawiając zespoloną postać napięcia: $\mathbf{U} = U_m e^{\mathbf{j(\omega t+\varphi)}}$ do wyrażenia $\mathbf{I} = Cd\mathbf{U}/dt$ otrzymujemy: $\mathbf{I} = Cj\omega\mathbf{U}$, a z tego mamy: $\mathbf{U} = \mathbf{I}/j\omega C$, czyli:

$$\mathbf{U} = (1/j\omega C)\,\mathbf{I},\quad \text{albo krócej:}\quad \mathbf{U} = \mathbf{X_c I},\ \mathbf{X_c} = 1/j\omega C$$

Zobaczmy to dokładniej. Definicji pojemności: $Q = CU$

Przy zmianach ładunku: $dQ/dt = CdU/dt$ **->** $I = CdU/dt$

Mając napięcie sinusoidalne: $U = U_{max}\cos(\omega t+\varphi)$

Uzyskamy: $I = CdU/dt = CU_{max}d(\cos(\omega t+\varphi=))/dt$

$((\omega CU_{max}(-\sin(\omega t+\varphi)) = \omega CU_{max}(\cos(\omega t+\varphi +90^o$

Czyli prąd w kondensatorze uzyskaliśmy mnożąc przez ωC napięcie, któremu zmieniliśmy fazę o 90^o. To oznacza, że mając prąd wystarczy podzielić go przez ωC i przesunąć jego fazę o -90^o.

Widać, że **nie ma tu współczynnika proporcjonalności** między prądem a napięciem! Jeżeli jednak funkcję $U = U_{max}\cos(\omega t+\varphi)$ potraktoujemy jako część rzeczywistą wielkości zespolonej $Re(U_{max}e^{j(\omega t+\varphi)}$:) to

$U = Re(U_{max}e^{j(\omega t+\varphi)})$.

$\mathbf{I} = Cd(U_{max}e^{j(\omega t+\varphi)})dt = j\omega CU_{max}e^{j(\omega t+\varphi)}$

$\mathbf{I} = jC\omega\mathbf{U}$, a z tego mamy: $\mathbf{U} = \mathbf{I}/j\omega C$, $\mathbf{U} = (1/j\omega C)\ \mathbf{I}$, albo krócej:

$\mathbf{U} = \mathbf{X_c}\mathbf{I}$, $\mathbf{X_c} = 1/j\omega C$ $\mathbf{Z_c} = \mathbf{X_c} = 1/j\omega C$.

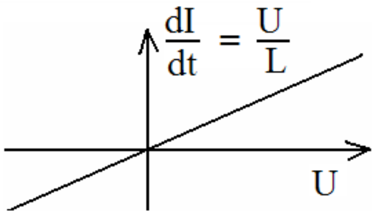
Jest współczynnik! Jest prawo Ohma!

Wyrażenie: $\mathbf{U} = \mathbf{X_c I}$ jest prawem Ohma dla kondensatora zapisanym przy pomocy funkcji zespolonych! Mamy to dzięki faktowi, że operator różniczkowania działając na $e^{j\omega t}$ daje tyle co proste pomnożenie przez stałą (tj. współczynnik przy t wykładnika w $e^{j\omega t}$)* . W dziedzinie liczb zespolonych mnożenie daje, oprócz zmiany modułu, również obrót wektora! Wielkość $1/j\omega C$ nazywamy reaktancją (lub impedancją) kondensatora. Zespolony spadek napięcia na idealnym kondensatorze jest iloczynem zespolonego natężenia prądu i impedancji X_C (czysto urojonej).

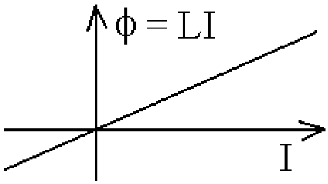
Istotną wadą rzeczywistych kondensatorów jest ich upływność i tzw. straty w dielektryku a dla prądów o wysokiej częstotliwości dodatkowy problem stanowi indukcyjność doprowadzeń i okładek.

*Do zamiany równań różniczkowo-całkowych na równania algebraiczne w wielu dziedzinach techniki stosowana jest transformata Laplace'a. W bieżącym (1-semestrowym) wykładzie ograniczamy się do stosowania liczb zespolonych.

<u>Cewki indukcyjne.</u> Modelem indukcyjności jest cewka, czyli też element z dwoma zaciskami – dwójnik. Ze względu na rodzaj rdzenia wyróżniamy cewki: ferrytowe, metalowe, powietrzne. Indukcyjność ma taką własność, że prędkość zmian istniejącego w niej prądu jest proporcjonalna do panującego na niej napięcia.



$$dI/dt = U/L \ \ -> U = LdI/dt$$



Tu stałe napięcie wymusza stały wzrost prądu.

Z takiej relacji między prądem a napięciem wynika, że impedancja cewki dla prądów zmiennych sinusoidalnie wyraża się funkcją zespoloną w postaci:

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{X}_L = j\omega L$$

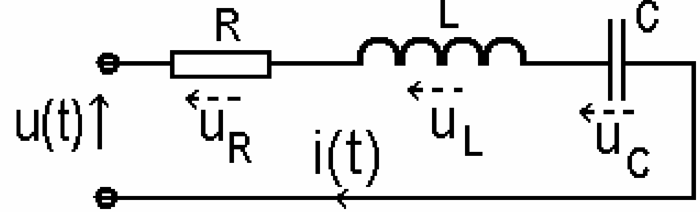
co łatwo sprawdzić podstawiając $\mathbf{I} = I_0 e^{j\omega t}$ do $\mathbf{U} = Ld\mathbf{I}/dt$. Po podstawieniu dostajemy <u>prawo Ohma</u>: $\mathbf{U} = j\omega L\mathbf{I} = \mathbf{X}_L\mathbf{I}$.

Oznacza to, że nie występuje tu proporcjonalność między chwilowymi wartościami napięcia i prądu. Zachodzi jednak proporcjonalność między wartościami skutecznymi lub amplitudami (tj. modułami czyli wartościami maksymalnymi, ale pojawiającymi się niejednocześnie - ***występuje przesunięcie fazowe***). Jak widać dla indukcyjności i pojemności współczynniki $\mathbf{X_L}$ i $\mathbf{X_C}$ są czysto urojone zatem wektory prądu z wektorami napięcia tworzą kąty proste. To oznacza, że iloczyn skalarny **U • I - moc tracona** w idealnym kondensatorze lub indukcyjności **jest zerem?!** Ten efekt odróżnia kondensatory i cewki od rezystorów. W rzeczywistości mamy do czynienia z pewnymi stratami mocy w dielektryku kondensatora i rdzeniu cewki. W obwodach LC dominujące są jednak straty mocy na rezystancji uzwojenia cewki. <u>**Zachowanie się cewek i kondensatorów zależy od częstotliwości sygnału elektrycznego**</u> **bo impedancje X_L i X_C zależą od ω.**

„Dławik” to solenoid o dużej indukcyjności pełniący rolę dużej impedancji dla prądów zmiennych.

Szeregowy obwód RLC.

Obwód



Stosując napięciowe prawo Kirchhoffa do pojedynczego „oczka” na rysunku obok, możemy napisać równanie:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

Równanie obwodu

$$u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt + L\frac{di(t)}{dt}$$

Przykładając sinusoidalne napięcie: $u(t) = U_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ musimy otrzymać prąd: $i(t) = I_m e^{j(\omega t+\psi)}$ (periodyczna przyczyna to i periodyczny skutek).

Wstawmy zatem do równania obwodu wyrażenie: $i(t) = I_m e^{j(\omega t+\psi)}$**.** Otrzymamy:

$$U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = RI_m e^{j(\omega t+\psi)} + (1/C)\int I_m e^{j(\omega t+\psi)} + Ld(I_m e^{j(\omega t+\psi)})/dt.$$

$$U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = RI_m e^{j(\omega t+\psi)} + (1/j\omega C)I_m e^{j(\omega t+\psi)} + j\omega L I_m e^{j(\omega t+\psi)}$$

$$U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = I_m e^{j(\omega t+\psi)}(R + 1/j\omega C + j\omega L)$$

$$U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = I_m e^{j(\omega t+\psi)}(R + j(\omega L - 1/\omega C)) \quad \text{->} \quad \mathbf{U} = \mathbf{I}\,\mathbf{Z}$$ czyli:

$U_{\text{Zespolone napięcie}} = I_{\text{Zespolony prąd}}\ (R + j(\omega L - 1/\omega C))_{\text{Impedancja zespolona}}$. Zespolona impedancja szeregowo połączonych R, L i C ma zatem postać: $\mathbf{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + j(X_L - X_C) = \mathbf{R} + \mathbf{X}$, możemy też zapisać: $\mathbf{Z} = \mathbf{R} + \mathbf{X}_L + \mathbf{X}_C$, $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3$. Ponadto $\mathbf{U} = \mathbf{I}\,\mathbf{Z}$ po rozpisaniu: $\mathbf{U} = \mathbf{I}\mathbf{Z}_1 + \mathbf{I}\mathbf{Z}_2 + \mathbf{I}\mathbf{Z}_3$ opisuje dzielnik napięcia dzielą napięcie zależnie od częstotliwości. Zatem zmieniają kształt sygnału, sygnał wyjściowy jest inny od wejściowego, chociaż są to elementy liniowe!

Podobnie działają **dzielniki prądu** zawierające elementy typu C lub L – dzielą prąd zależnie od częstotliwości.

Dla układów R L C obowiązuje uogólnione prawo Ohma:

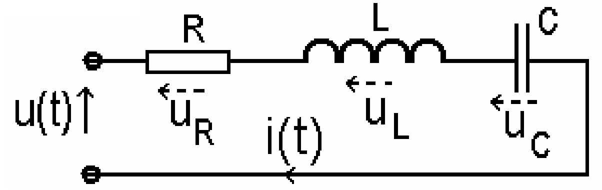
$\mathbf{U} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}$, $\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U}$, gdzie $\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$, **Z** - impedancja, **Y** – admitancja,

i wszystkie wielkości są wyrażane w postaci zespolonej.

Obliczanie wypadkowej impedancji $\mathbf{Z}_w$ dla układu złożonego z elementów $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, ...$\mathbf{Z}_n$, odbywa się podobnie jak obliczanie wypadkowej rezystancji układu złożonego z elementów R_1, R_2,.... R_n. Różnicę daje tylko samo zastosowanie liczb zespolonych.

Należy pamiętać, że rzeczywistą wartością chwilową napięcia jest: $U(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{U}(t))$. Rzeczywistą wartością chwilową prądu jest $I(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{I}(t))$. **Impedancję** wyrażamy jako: $\mathbf{Z} = \mathbf{R} + \mathbf{X}$ (zawada = oporność czynna + oporność bierna), gdzie: $\mathbf{X} = \mathbf{X}_L + \mathbf{X}_C$, $\mathbf{X}_L = j\omega L$ i $\mathbf{X}_C = 1/j\omega C$. R jest rezystancją, a $j\omega L$ i $1/j\omega C$ nazywamy **reaktancjami**, impedancjami biernymi. **Admitancje** to (odwrotności impedancji) $\mathbf{Y} = \mathbf{1/Z} = G+jB$, $\mathbf{G} = 1/\mathbf{R}$ - **konduktancja**, $\mathbf{B} = \mathbf{1/X}$ - **susceptancja**, $\mathbf{Y}_C = j\omega C$, $\mathbf{Y}_L = 1/j\omega L$.

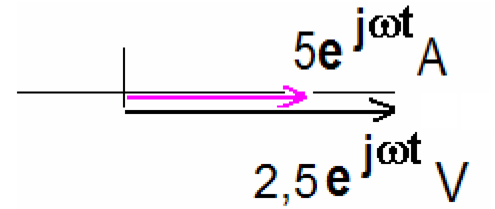
Przykład. Wiedząc, że w układzie obok jest prąd zmienny o natężeniu I = 5cosωt A, ω = 2π50 rad/s = 314 rad/s, R = 0,5 Ω, L = 1 mH, C = 4 mF, obliczyć wszystkie napięcia.



Rozw. U_R = IR = (5cosωt A)(0,5 Ω) = 2,5cosωt V, **lub**

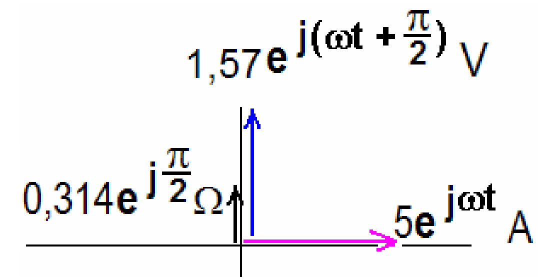
$\mathbf{U_R}$ = [5(cosωt +jsinωt) A](0,5 Ω) = 2,5(cosωt +jsinωt) V**,**

albo: U_R = (5$e^{j\omega t}$ A)(0,5 Ω) = 2,5$e^{j\omega t}$ V = 2,5∠0 V

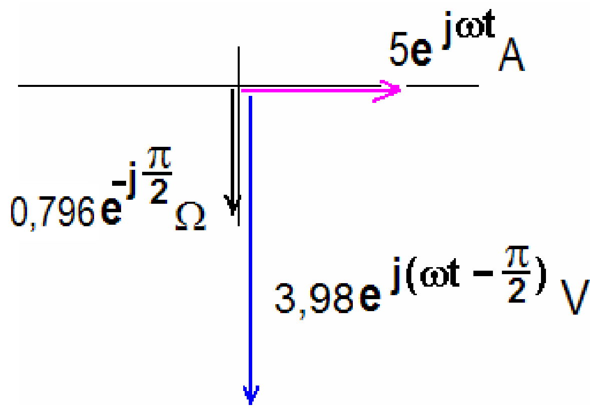


$\mathbf{U_L}$ = **I$\mathbf{X_L}$** = **I (jωL)** = [5(cosωt + jsinωt) A](j0,314 Ω) = 1,57(- sinωt + jcosωt) V = 1,57[cos(ωt + π/2) + jsin(ωt + π/2)] V, albo

$\mathbf{U_L}$ = 5$e^{j\omega t}$0,314$e^{j\pi/2}$ AΩ = 1,57$e^{j(\omega t+\pi/2)}$ V = 1,57∠π/2 V.



$\mathbf{U_C}$ = **I$\mathbf{X_C}$** = **I(**1/jωC**)** = **I(**-j/ωC**)** = **(**5$e^{j\omega t}$ A)(-j/1,26 Ω) = 5$e^{j\omega t}$0,796$e^{-j\pi/2}$ = 3,98$e^{j(\omega t-\pi/2)}$ V = 3,98∠-π/2 V.

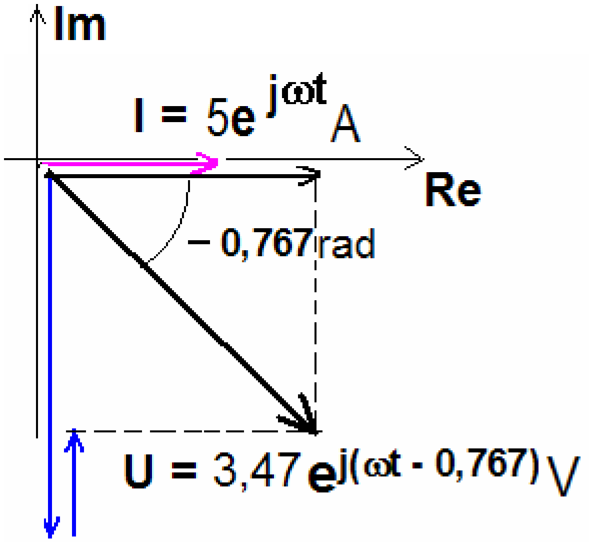


U = $\mathbf{U_R}$ + $\mathbf{U_L}$ + $\mathbf{U_C}$, dla t = 0: **U =** 2,5 V + 1,57[jsin(0 + π/2)] V + 3,98[jsin (0 - π/2)] V =[2,5 + j1,57 - j3,98] V = 2,5 V – j 2,41 V. Arctan(-2,41/2,5) = -0,767rad.

$(2{,}5^2 + 2{,}41^2)^{0{,}5}$=3,47 -> **U** = 3,47**$e^{j(\omega t\ -\ 0{,}767)}$** V= 3,47∠-0,767 V.

$U = 3{,}47e^{j(\omega t - 0{,}767)}$ **V**

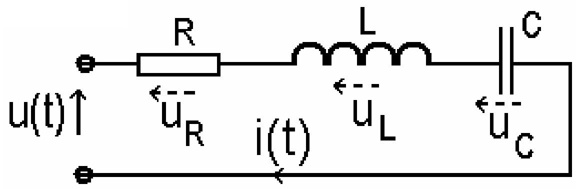
graficzna ilustracja tego wyniku : ->

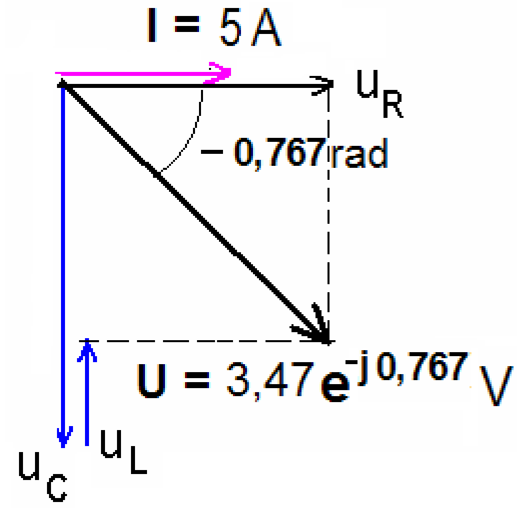


Wykresy wskazowe

Wskaz (ang. phasor) jest liczbą zespoloną $Ae^{j\Phi}$ i wektorem na płaszczyźnie zespolonej reprezentującym sinusoidalny przebieg $A\cos(\omega t + \Phi)$.

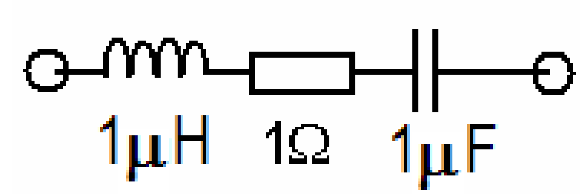
Np. $\mathbf{u(t)} = U_{max}\cos(\omega t + \Phi) = \mathrm{Re}[U_{max}e^{j(\omega t + \Phi)}] = \mathrm{Re}[U_{max}e^{j\Phi}e^{j\omega t}]$. Wskazem napięcia jest tu $U_{max}e^{j\Phi}$ (taki wskaz bywa zapisywany jako: $U_{max}\angle\Phi$) czyli jest to zespolona postać napięcia **U** w pewnej dogodnej chwili t (zwykle t = 0).





Zatem wykres wskazowy do poprzedniego przykładu można przedstawić jak obok:

Przykład 1. Obliczyć zawadę układu oraz natężenie prądu po przyłożeniu Napięcia $U = 240\cos(314t)$.



Rozw.

$\mathbf{Z} = X_L + R + X_C = R + j\omega L - j/\omega C =$

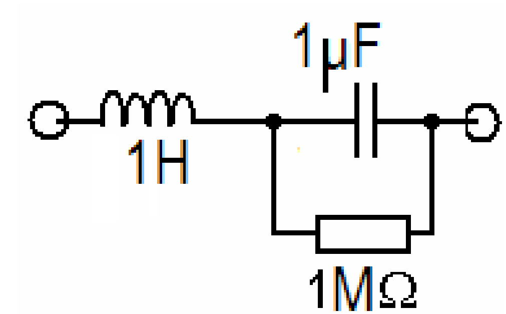
$1\Omega + j(\omega 10^{-6} - 1/\omega 10^{-6})\Omega =$

$1\Omega + j(3{,}14 10^{-4} - 1/(3{,}14 \cdot 10^{-4}))\Omega = 1\Omega + j3183\Omega =$

$3183\angle 89{,}98°\ \Omega$.

$\mathbf{I} = \mathbf{U/Z} = 240\angle 0°/\ 3183\angle 89{,}98°\ A =$

$75{,}4mV\angle -89{,}98°\ A$.



Przykład 2. Obliczyć zależność zawady od ω.

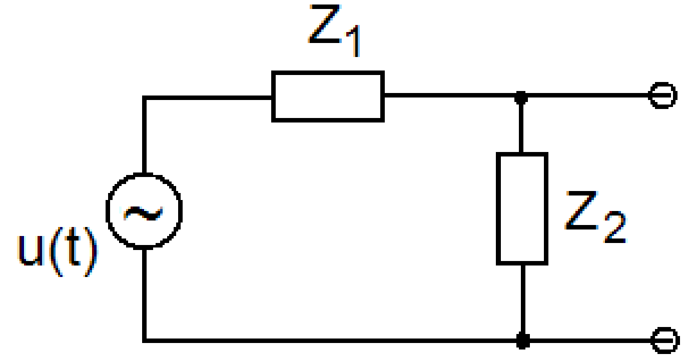
Rozw. $\mathbf{Z} = X_L + X_C R/(R + X_C) =$

$j\omega L - j(R/\omega C)/(R - j/\omega C) =$

$j\omega - j(10^{12}/\omega)/(10^6 - j10^6/\omega) = j\omega - j10^6/(\omega - j)$

$= 10^6/(\omega^2 + 1) + j\omega(1 - 10^6/(\omega^2 + 1))$.

Przykład 1. Znajdź zastępczy układ Thevenina podanego układu.



Rozw. Z punktu widzenia zacisków: Z_1 II Z_2,
Jeżeli Z_1 i Z_2 są równoległe to Z_T obliczymy ze wzoru na zastępczą impedancję połączenia równoległego:

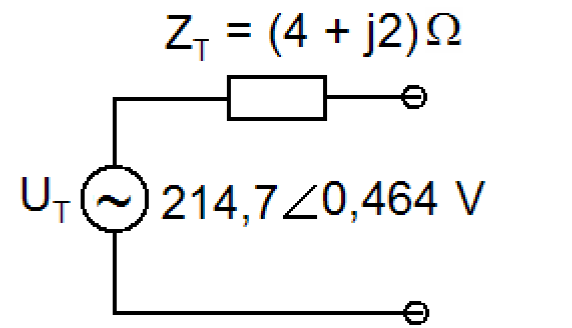
$$u(t) = 240\cos(314t)\ \mathrm{V}$$

$$Z_1 = 5\Omega\,, \quad Z_2 = j10\,\Omega$$

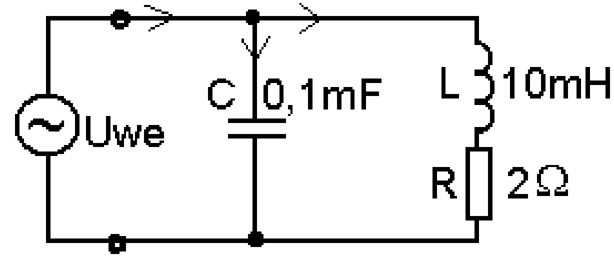
$$Z_T = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{5\Omega \times j10\,\Omega}{5\Omega + j10\,\Omega} = \frac{500 + j250}{125}\,\Omega = (4 + j2)\,\Omega$$

$$U_T = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\,u(t) = \frac{j10\,\Omega}{5\Omega + j10\,\Omega}\,240\angle 0 = \frac{10\angle\frac{\pi}{2}}{11{,}18\angle 1{,}107}\,240\angle 0 = 214{,}7\angle 0{,}464\ \mathrm{V}$$

$$U_T = 214{,}7\cos(314t + 0{,}464)\ \mathrm{V}$$



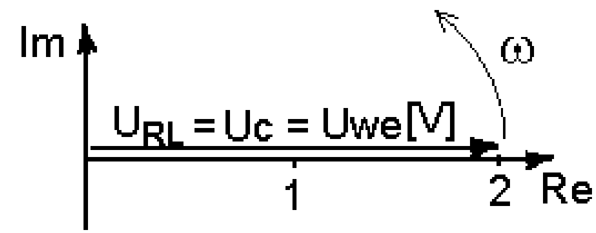
Przykład. Narysować wykres wskazowy dla układu RLC, jak na rysunku, zasilaneg napięciem sinusoidalnym o częstości kątowej ω = 1000 rad/s i amplitudzie 2 V.



$$Uwe = U_C = U_{RL}$$

Rozwiązanie. Postać zespolona Uwe to $2e^{j(\omega t+\varphi)}$[V]

Prąd z zasilacza ulega rozgałęzieniu na I_C i I_{RL}. Natomiast napięcie Uwe panuje na zaciskach pojemności C oraz układu LR, dlatego do wykreślenia wykresu wskazowego wybierzemy chwilę, gdy to wspólne napięcie Uwe osiąga maksimum swej składowej rzeczywistej, tj. gdy pokrywa się z osią rzeczywistą układu współrzędnych. Musimy narysować wektory: Uwe, Uc, U_L, U_R, U_{RL}, I, Ic i I_{RL} dla dowolnej, wybranej chwili np. Uwe =(2 + j0)[V]. Oczywiście Uc i U_{RL} już mamy bo Uc = U_{RL} = Uwe.



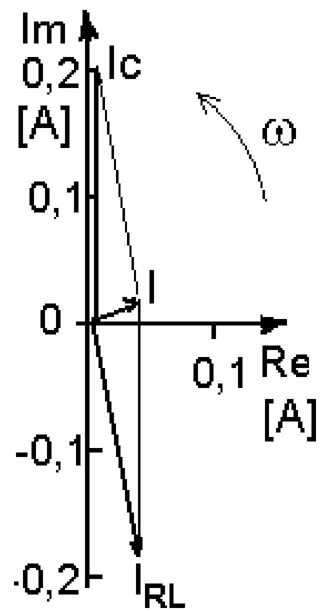
$$Ic = \frac{Uwe}{Xc} \quad \text{dla wybranej chwili} \quad Ic = \frac{2\,V}{1/j\omega C} = j0{,}2\ [A]$$

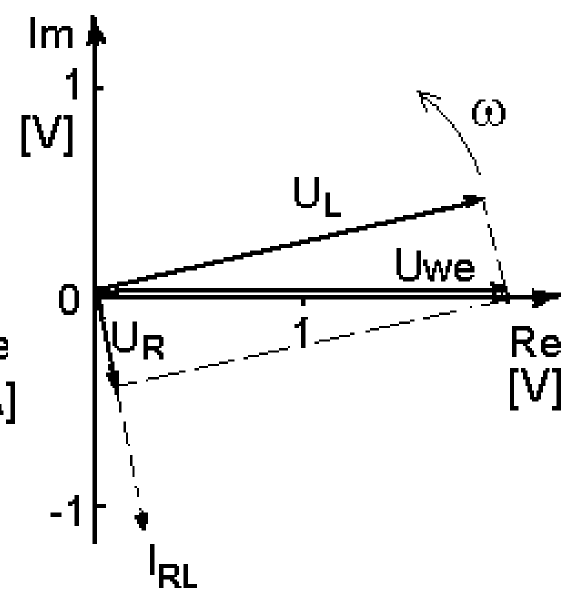
$$I_{RL} = \frac{Uwe}{Z_{RL}} = \frac{2\,V}{R+j\omega L} = \frac{2(R - j\omega L)}{R^2 + \omega L^2} \simeq (0{,}038 - j0{,}19)[A]$$

$$I = Ic + I_{RL} = (0{,}038 + j0{,}01)[A]$$

$$U_R = I_{RL}R = (0{,}076 - j0{,}38)[V]$$

$$U_L = I_{RL}X_L = (0{,}038 - j0{,}19)j\omega L = (1{,}9 + j0{,}38)[V]$$

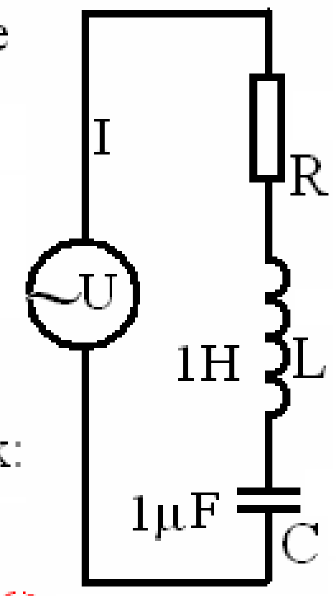




Uzyskane wykresy wskazowe obrazują wzajemne relacje między poszczególnymi wielkościami zespolonymi.

Z biegiem czasu oczywiście układ wektorów (sztywno) wiruje wokół początku układu współżędnych z częstością kątową ω. To co mierzymy to oscylujące składowe rzeczywiste tych wirujących wektorów.

Przykład. Dobrać wartość oporności R tak aby dla napięcia U o częstotliwości rezonansowej dla szeregowego układu (jak na rysunku) uzyskać 100 krotne przepięcia na kondensatorze i indukcyjności tj. $|U_C| = |U_L| = 100 \times |U|$



Rozwiązanie: W rezonansie mamy minimum impedancji Z

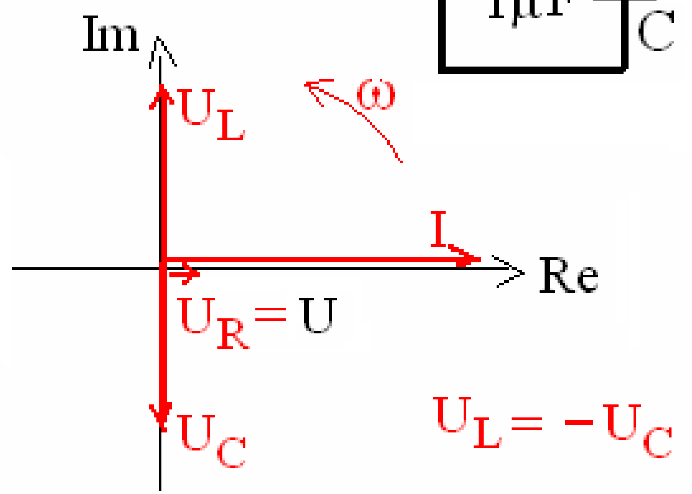
$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R$$

To znaczy, że: $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$ i $|U_L| = |U_C|$ oraz $U = U_R$

Wykres wskazowy dla rezonansowej wartości $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ może wyglądać tak:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R} \qquad |U_L| = |I|\omega L = \frac{|U|}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}} L = \frac{|U|}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Podobnie $|U_C| = \dfrac{|U|}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$



Aby otrzymać $|U_L| = 100 \times |U|$

tj. $\dfrac{|U|}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 100\,|U| \Longrightarrow R = \dfrac{1}{100}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

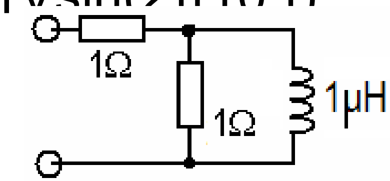
Gdy $L = 1H$ i $C = 1\mu F$ to $R = \dfrac{1}{100}\sqrt{\dfrac{1}{10^{-6}}}\ \Omega = \underline{10\,\Omega}$

Elektronika lista zadań 03

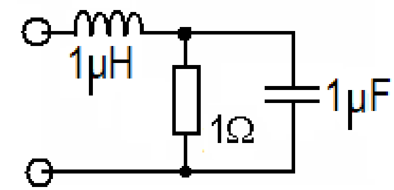
1. Mając dwie liczby zespolone $A = 3 + j3$, $B = 1 + j\sqrt{3}$, oblicz AB oraz A/B.

2. Narysować wykres wskazowy dla szeregowo połączonych rezystora 10Ω i kondensatora 1mF, przez które płynie prąd $I = 2\sin(2\pi 50t)$ A. Oblicz całkowite napięcie przyłożone do układu RC oraz różnice faz między prądem i wszystkimi napięciami.

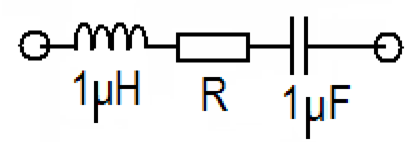
3. Do indukcyjności L = 1 mH o rezystancji uzwojenia 1Ω należy dołączyć szeregowo kondensator tak aby uzyskać rezonans dla częstotliwości 1MHz. Narysować wykres wskazowy dla zasilania napięciem $U = 1V\sin(2\pi 10^6 t)$



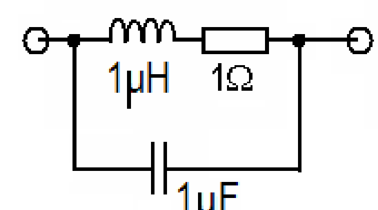
4. Obliczyć zawadę układu dla częstotliwości kątowej (pulsacji) 1rad/s i 1Mrad/s. Obliczyć różnicę faz między przyłożonym napięciem a prądem w tym układzie.



5. Oblicz zawadę układu dla pulsacji 1rad/s i 1Mrad/s. Oblicz różnicę faz między napięciem i prądem w tym układzie.



6. Narysuj wykres wskazowy i obliczyć wartości przepięcia w rezonansie układu dla R = 1 Ω, i R= 0,1 Ω przy zasilaniu napięciem o amplitudzie 1V.



7. Znajdź częstotliwość rezonansową dla układu.