Uniwersytet Wrocławski

Wydział Fizyki i Astronomii
Instytut Fizyki Doświadczalnej

pl. M. Borna 9
50-204 Wrocław
tel. +48 71 375 93 02, +48 71 328 73 65
fax +48 71 328 73 65
e-mail: sekr@ifd.uni.wroc.pl
www.ifd.uni.wroc.pl

# Elektronika (konspekt)

Franciszek Gołek **(golek@ifd.uni.wroc.pl)**

www.pe.ifd.uni.wroc.pl

## Wykład 04

## Filtry RLC

**Filtrem** nazywamy urządzenie, które przepuszczając (transmitując) sygnał wejściowy może zmieniać przy tym jego spektralny rozkład energii.

Filtry dzielimy pod względem technologii wykonania:

a) Pasywne (są nimi dzielniki napięcia z elementami pasywnymi: R, C i L).

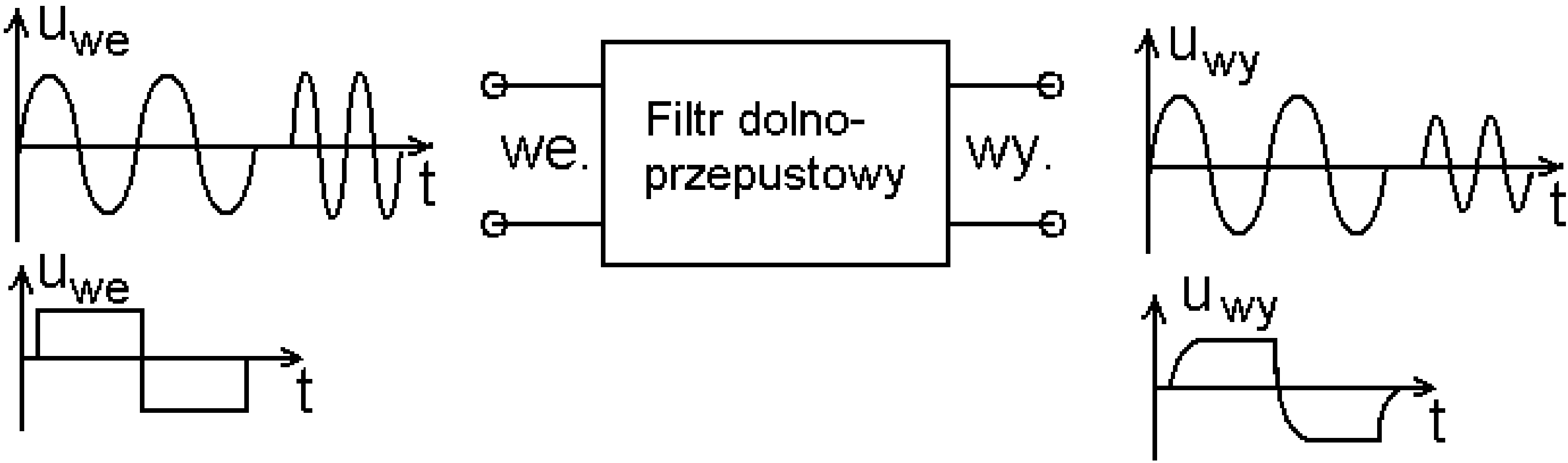
b) Aktywne (zawierają, oprócz elementów R, C i L, tranzystory lub wzmacniacze operacyjne).

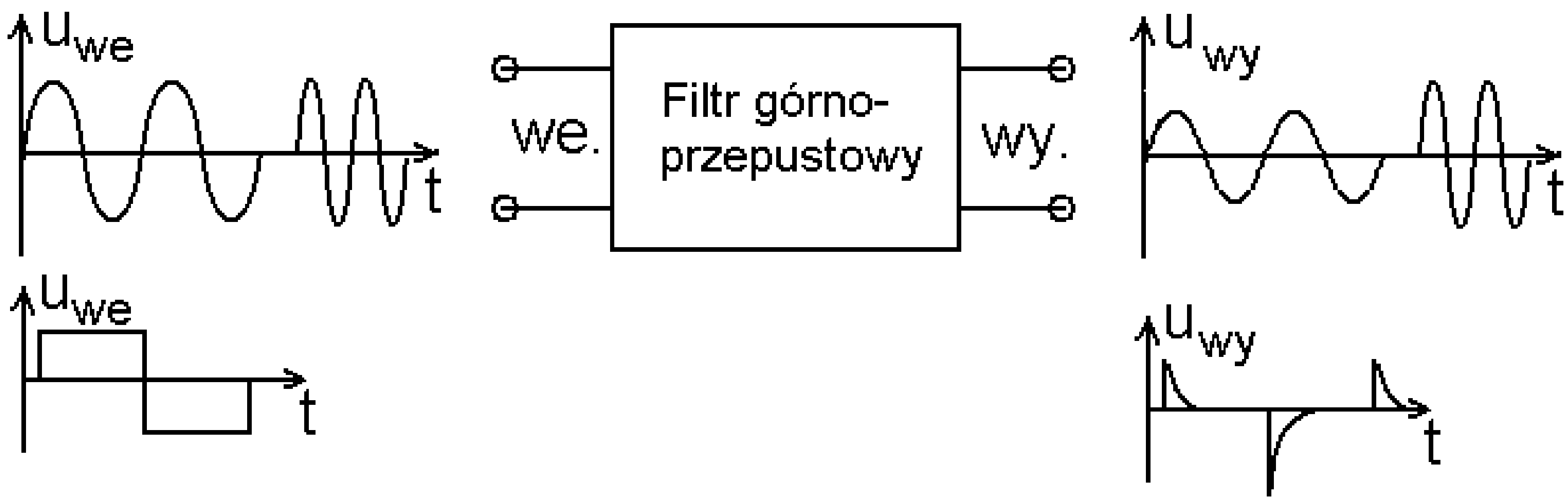
c) Cyfrowe, w których sygnał jest zamieniany na postać cyfrową a następnie szeregi liczb są przetwarzane, filtrowane i ponownie zamieniane na sygnał.

d) Inne np. kwarcowe.

Filtry mają za zadanie przenosić sygnały o interesujących nas częstotliwościach i tłumić sygnały o częstotliwościach niepożądanych. Filtry, poprzez zmianę składowych harmonicznych, modelują impulsy elektryczne.

# Obrazkowa ilustracja działania filtru

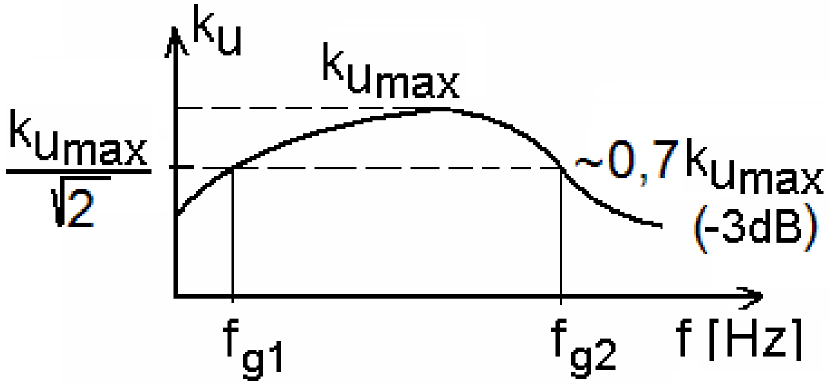


# Pasmo przenoszenia filtra

Jest to obszar częstotliwości o najlepszym przenoszeniu sygnału zawarty między granicami pasma. Granice pasma przenoszenia to takie częstotliwości, przy których moduł współczynnika przenoszenia sygnału $k_U = |U_{wy}/U_{we}|$ lub $k_I = |I_{wy}/I_{we}|$ jest $\sqrt{2}$ razy mniejszy od swej maksymalnej wartości. Inaczej: granice pasma to takie częstotliwości $f_g$, przy których stosunek $k(f_g)/k_{max}$ wyrażony w decybelach wynosi -3dB. Częstotliwości graniczne spełniają równość:

$$|K(f_g)/K_{max}| = k(f_g)/k_{max} = 1/\sqrt{2}$$




## Filtry RC (pasywne) - dzielniki napięcia zależne od częstotliwości.

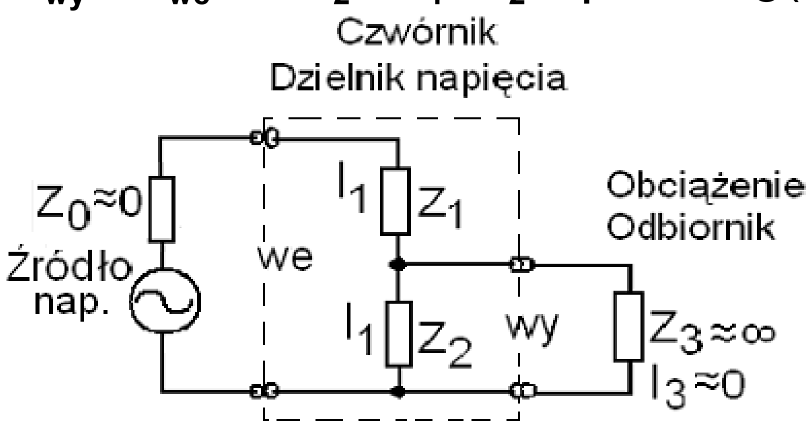
Filtry RC stanowią bardzo ważne zastosowanie kondensatorów. Obliczenia parametrów tych dzielników, w dziedzinie częstotliwości, wymagają stosowania uogólnionych praw: Ohma i Kirchhoffa czyli praw Ohma i Kirchhoffa w zapisie zespolonym (czyli przy pomocy liczb zespolonych i funkcji zespolonych).

# Współczynnik przenoszenia $k_U$ i przesunięcie fazy $\varphi$.

Rysunek przedstawia dzielnik napięcia złożony z zespolonych impedancji $Z_1$ i $Z_2$, zasilany przez źródło o pomijalnie małej impedancji wewnętrznej $Z_0 \sim 0\Omega$. Zatem $Z_0$ ma pomijalny udział w podziale napięcia Thevenina. Ponadto dzielnik jest nieobciążony, gdyż obciążenie Z3 ~ **∞.** Aby obliczyć współczynnik przenoszenia tego dzielnika, zwanego też czwórnikiem bo ma dwa zaciski wejściowe i dwa zaciski wyjściowe – razem cztery, stosujemy taką logikę jak przy zwykłych opornikach ale z użyciem liczb zespolonych. Zespolony stosunek $\mathbf{U_{wy}/U_{we}} = \mathbf{K_U} = k_U \mathbf{e}^{i\varphi}$ zawiera współczynnik przenoszenia $k_U$ czyli stosunek wartości skutecznych lub amplitud - modułów napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego $|U_{wy}|/|U_{we}|$ oraz względne przesunięcie fazy $\boldsymbol{\varphi}$**.**

Napięcie wyjściowe to spadek napięcia na $\mathbf{Z_2}$: $\mathbf{U_{wy}} = \mathbf{U_2} = \mathbf{I_1 Z_2}$. Napięcie wejściowe to spadek na szeregowo połączonych $\mathbf{Z_1}$ i $\mathbf{Z_2}$ czyli $\mathbf{U_{we}} = \mathbf{I_1 Z_1 + I_1 Z_2}$.

$k_U = |\mathbf{U_{wy}}|/|\mathbf{U_{we}}| = |\mathbf{Z_2}|/|\mathbf{Z_1+Z_2}|$, $\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{arctg}((\mathrm{Im}(\mathbf{K_U}))/(\mathrm{Re}(\mathbf{K_U})))$.




$$K_U = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = k_U e^{i\varphi}$$

$$k_U = |K_U| = \left|\frac{I_1 Z_2}{I_1 Z_1 + I_1 Z_2}\right| = \left|\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\right|$$

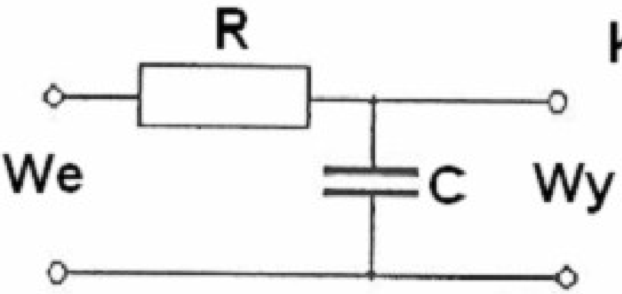
$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(K_U)}{\mathrm{Re}(K_U)}$$

**Wykres wskazowy (wskaz, fazor).** Fazorem (wskazem) $\mathbf{F} = F_m e^{j\varphi}$ nazywamy wielkość zespoloną, która reprezentuje funkcję sinusoidalnie zmieniającą się w czasie. Zbiorem wartości $\mathbf{F} = F_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ jest okrąg o promieniu $F_m$ ze środkiem w początku układu płaszczyzny zespolonej (Re, Im). Wykresem wskazowym nazywamy graficzną prezentację napięć i prądów sinusoidalnych w danym układzie prądu zmiennego o zadanej częstotliwości. Wykres ilustruje wielkości amplitud prądów i napięć oraz ich relacje fazowe w układzie w stanie stacjonarnym (tj. po czasie od włączenia źródeł znacznie dłuższym od okresu oscylacji T). Pojedynczy wykres dotyczy jednej (chociaż dowolnie wybranej) częstotliwości. Wykresy wskazowe są też graficzną ilustracją równań jakie dają nam prawa Kirchhoffa (prądowe i napięciowe) oczywiście zapisane w postaci zespolonej. Dlatego początkujący często wykreślają wskazy na płaszczyźnie zespolonej z zaznaczonymi osiami Im i Re. W rzeczywistości na takiej płaszczyźnie wszystkie wektory powinny wirować zgodnie z pulsacją ω, natomiast wykres jest uchwyceniem ułożenia wektorów w określonej, dogodnej chwili (np. gdy jakiś prąd lub napięcie przechodzi przez swoje maksimum). Z wykresu znajdujemy relacje między długościami wektorów (tj. amplitudami) napięć i prądów oraz ich względne przesunięcia fazowe. Wykresy wskazowe są szeroko stosowane w elektrotechnice. Przy analizie filtrów mogą stanowić dogodną ilustrację relacji między sygnałem wejściowym i wyjściowym danego filtra dla wybranej częstotliwości.

**Ważne!**
**W przykładach, w których zastosujemy zapis wielkości w postaci zespolonej należy zauważyć, że:**
**1) Do zapisu równań będących prawami Kirchhoffa wstawiamy wszystkie napięcia, prądy i impedancje w postaci zespolonej. Prawa Kirchhoffa nie obowiązują dla wartości skutecznych i dla modułów czyli amplitud. Oczywiście po napisaniu równania możemy wziąć moduły obu stron (całych stron!).**
**2) Gdy prawo Ohma jest treścią równania (jedna wielkość = iloczyn lub iloraz dwu innych) to możemy go zapiać nie tylko dla wielkości zespolonych ale również dla modułów i dla wartości skutecznych.**

# Filtr dolnoprzepustowy, opis w dziedzinie częstotliwości.

Opis ten mówi jak, w funkcji częstotliwości, ma się stosunek amplitud napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego - $k_u$ oraz względna różnica faz - $\varphi$ sygnału wyjściowego względem wejściowego. Obie te wielkości mamy w funkcji zespolonej przedstawiającej stosunek zespolonych wartości napięcia wyjściowego do wejściowego. Zakładamy, że źródło sygnału ma zerową a obciążenie nieskończoną oporność wewnętrzną.




$$K_U = \frac{U_{wy}}{U_{we}} = \frac{I\,\frac{1}{j\omega C}}{I\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1 - j\omega RC}{(\omega RC)^2 + 1}$$

$$K_U = |K_U| e^{j\varphi} = k_U e^{j\varphi} \quad \text{gdzie: } k_U = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

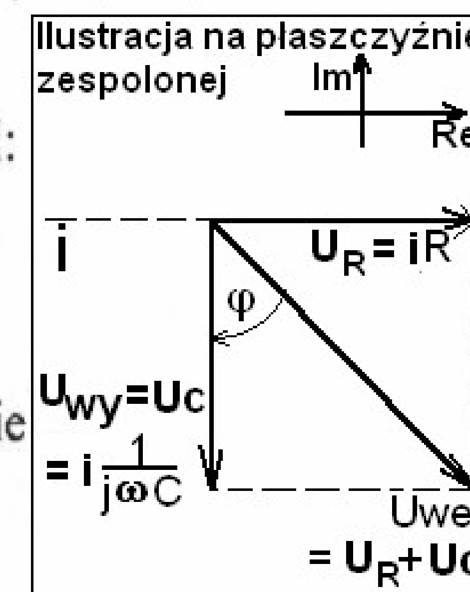
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}(Ku)}{\operatorname{Re}(Ku)} = -\operatorname{arctg}\omega RC,$$

Ponieważ $k_{u(max)} = 1$, częstotliwość graniczną znajdujemy z równości:

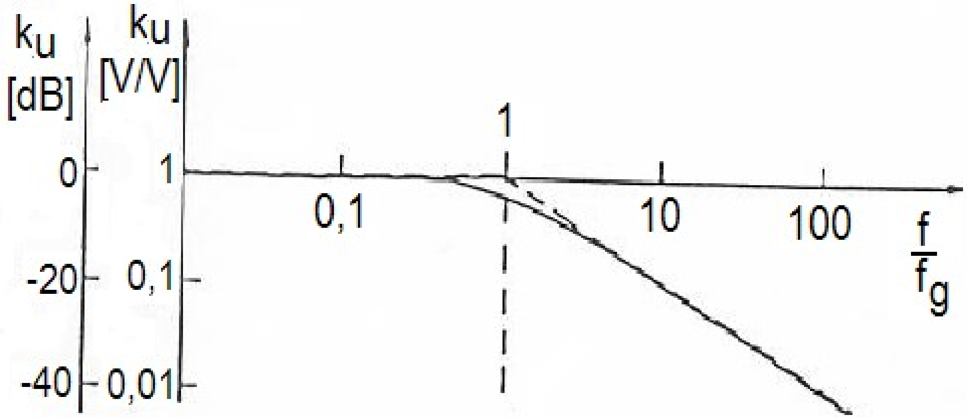
$k_u = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mamy: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$, czyli $(\omega_g RC)^2 = 1$

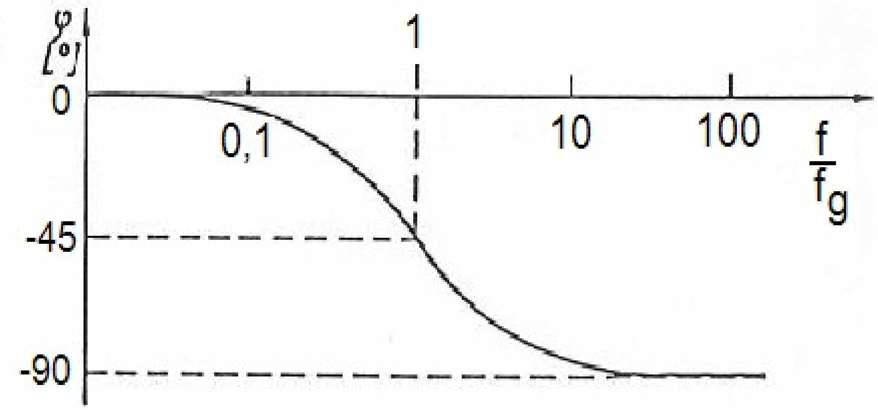
tj. $\omega_g = 1/RC$, zatem **częstotliwość graniczna** = $\boxed{f_g = \frac{1}{2\pi RC}}$

Widać, że dla wielkich częstotliwości $k_u = 1/\omega RC$, tzn. wzmocnienie jest odwrotnie proporcjonalne do częstotliwości. Przy 10-krotnym wzroście częstotliwości wzmocnienie maleje 10 razy.

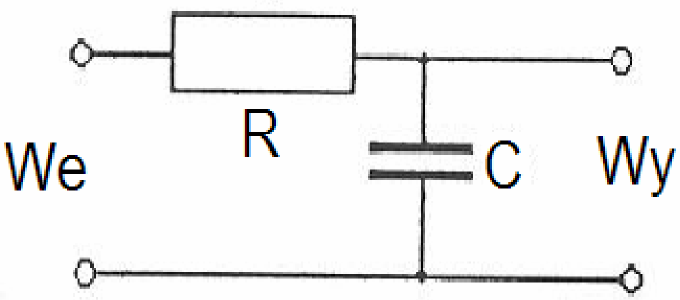


Charakterystyki amplitudowa i fazowa najprostszego filtru dolnoprzepustowego:




# Opis w dziedzinie czasu.




$$u_{wy} = q/C = \frac{1}{C}\int i dt = \frac{1}{RC}\int (u_{we} - u_{wy}) dt,$$

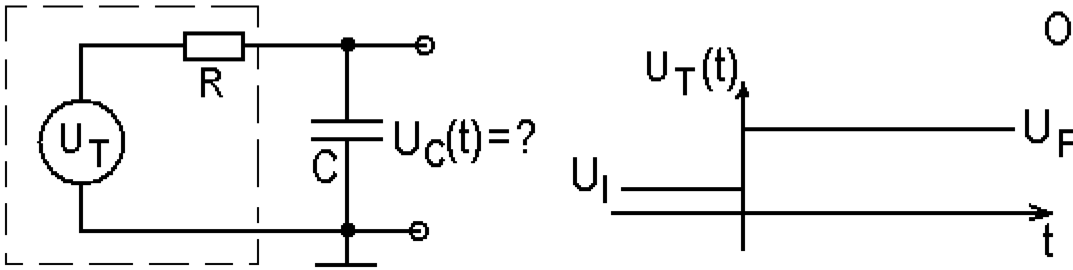
Gdzie i jest natężeniem prądu w układzie a $u_{we} - u_{wy}$ spadkiem napięcia na rezystorze R. Dla dużych częstotliwości, gdy $u_{we} >> u_{wy}$ otrzymamy:

$u_{wy} = \frac{1}{RC}\int u_{we}\, dt$. Z tego powodu układ ten nazywany jest układem całkującym.

# Problem szybkich zmian potencjału elektrycznego - problem przełączeń

Szybkie zmiany napięcia (przełączenia) są fundamentalnym zagadnieniem w elektronice cyfrowej. Proces przełączenia zilustrujemy na prostym przykładzie.

Przykład. Kondensator o pojemności C zasilany przez układ o podanym napięciu i oporności Thevenina. Napięcie Thevenina w chwili t = 0s zmienia się skokowo z wartości początkowej $U_I$ do wartości końcowej $U_F$.




Obliczyć przebieg napięcia na kondensatorze C.

Rozwiązanie: Oczywiście w chwili t = 0 s mamy: $U_C(0) = U_I$ dla znaleźienia $U_C(t)$ napiszemy równanie stosując metodę węzłową $\frac{U_C - U_T}{R} + C\frac{dU_C}{dt} = 0$ Po przekształceniu mamy: $RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = U_F$.

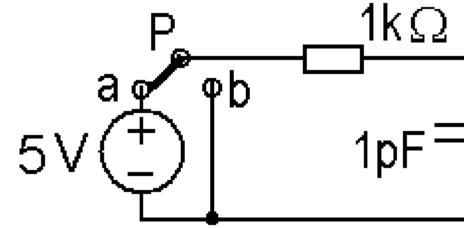
To równanie różniczkowe (mówiące, że tempo zmian $U_C$ jest proporcjonalne do różnicy między $U_F$ a $U_C$) rozwiążemy w trzech krokach. 1. Znajdziemy rozwiązanie szczególne. 2. Znajdziemy rozwiązanie homogeniczne (tj. rozwiązanie równania jednorodnego). 3. Biorąc sumę powyższych za rozwiązanie ogólne znajdziemy stałe znając tzw. warunki początkowe.

1. Rozwiązaniem szczególnym może być oczywiścia wartość stała $U_{C_S} = U_F$.
2. Rozwiązanie homogeniczne otrzymamy z równania: $RC\frac{dU_{C_h}}{dt} + U_{C_h} = 0$ jako: $U_{C_h} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$
3. Rozwiązanie ogólne ma zatem postać: $U_C = U_{C_S} + U_{C_h} = U_F + Ae^{-\frac{t}{RC}}$

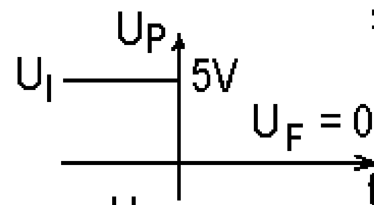
W chwili początkowej t = 0, $U_C = U_I = U_F + A$, zatem $A = U_I - U_F$ i mamy: $\boxed{U_C = U_F + (U_I - U_F)e^{-\frac{t}{RC}}}$

Otrzymane wyrażenie $\boxed{U_C = U_F + (U_I - U_F)\,e^{-\frac{t}{RC}}}$ mówi, że napięcie $U_C$ zmierza od $U_I$ do $U_F$ po eksponencie. Lub inaczej: różnica między wartością aktualną a końcową zanika po eksponencie.

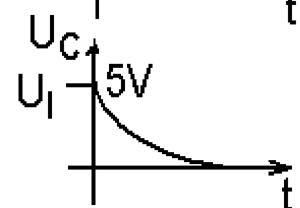
Dla przykładu sprawdźmy efekt przełączenia przełącznika P na przebieg napięcia na pojemności 1pF na rys. obok.




a) Przełączając z a do b mamy wymuszanie w postaci:

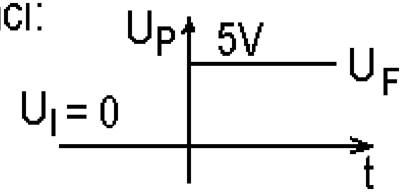



$$U_C = 0 + (U_I - 0)\,e^{-\frac{t}{RC}} = U_I\,e^{-\frac{t}{RC}} = 5\,e^{-\frac{t}{10^{-9}s}}\,V$$

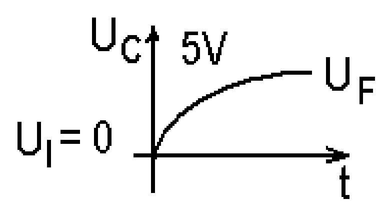



$$\boxed{U_C = U_I\,e^{-\frac{t}{RC}}} \quad (t \geqslant 0)$$

b) Przy przełączeniu z b do a mamy wymuszenie w postaci:




$$U_C = U_F + (0 - U_F)\,e^{-\frac{t}{RC}} = U_F(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 5(1 - e^{-\frac{t}{10^{-9}s}})\,V$$




$$\boxed{U_C = U_F(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$$

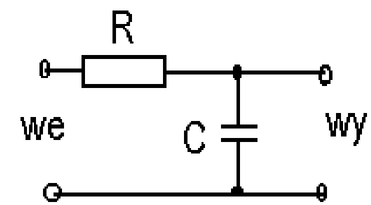
$(t \geqslant 0)$

Bardzo często podczas łączenia układów elektronicznych powstają pasożytnicze układy całkujące. Zwykle składają się one z rezystancji wyjściowej jednego układu i pojemności wejściowej następnego lub pojemności przewodów łączących. Te pasożytnicze elementy mogą przyczyniać się do zmniejszenia górnej częstotliwości granicznej danej aparatury oraz wpływać na kształt i czas trwania impulsów.

Przypomnijmy, co pojawia się na nieobciążonym wyjściu dolnoprzepustowego filtru RC gdy na jego wejściu wymuszamy skok napięcia o wartości $U_0$.

Stosując I prawo Kirchhoffa otrzymujemy podobnie jak poprzednio:

$(u_{we}-u_{wy})/R - i_C = 0$, tj. $Ri_C + u_{wy} = u_{we}$



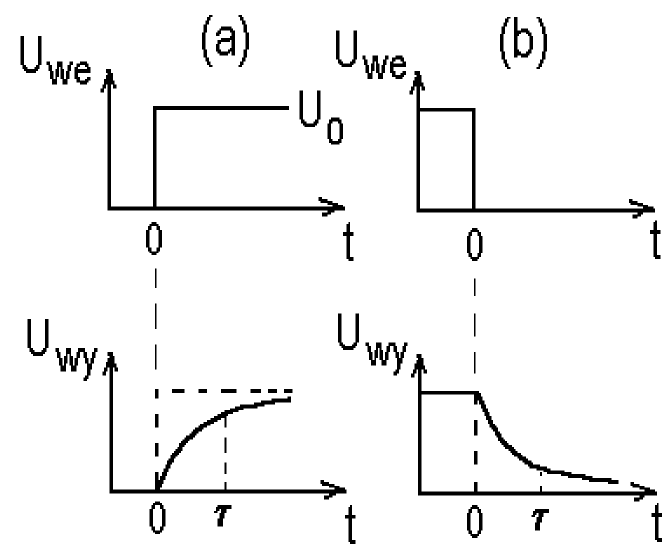

po podstawieniu $i_C = Cu'_{wy}$ ($u'_{wy} = du_{wy}/dt$) mamy:

a) $RCu'_{wy} + u_{wy} = U_0$

b) $RCu'_{wy} + u_{wy} = 0$

Rozwiązaniem a) jest: $u_{wy}(t) = U_0(1 - e^{-t/RC})$

Rozwiązaniem b) jest: $u_{wy}(t) = U_0e^{-t/RC}$




Iloczyn RC, zwany stałą czasową **τ**, określa czas, po którym $u_{wy}(t)$ zbliża się do swej asymptotycznej wartości na „odległość" = 1/e wysokości skoku.

$$\tau = RC$$

Oszacujmy ile wynosi czas narastania impulsu prostokątnego zdeformowanego filtrem dolnoprzepustowym. Czyli w jakim czasie $U_{wy}(t)$ wzrośnie od 10% do 90% swej wartości maksymalnej?

$0.9\ U_0 = U_0(1 - e^{-t/RC})$ -> $t_{90\%} = -RC\ln 0.1$ ($U_0 \approx$ wartość maksymalna)

$0.1 = 1 - e^{-t/RC}$ -> $t_{10\%} = -RC\ln 0.9$

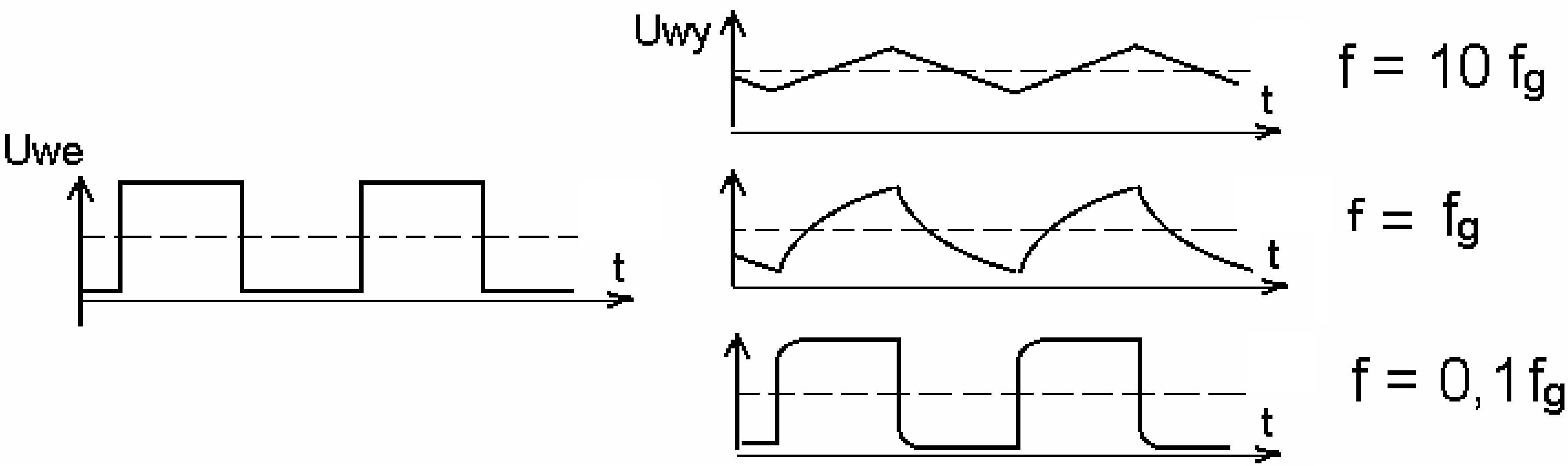
$t_r = t_{90\%} - t_{10\%} = RC(\ln 0.9 - \ln 0.1) = RC\ln 9 \approx 2.2RC.$

Pamiętając, że $f_g = 1/(2\pi RC)$ -> $RC = 1/2\pi f_g$ otrzymamy związek:

$t_r \approx 2.2RC = 2.2/(2\pi\ f_g)$. Zatem możemy napisać:

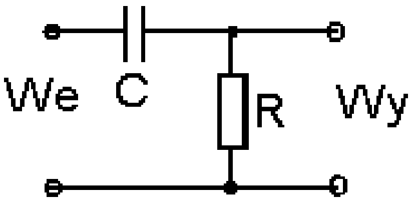
$$\mathbf{t_r \approx 1/(3f_g).}$$

Rysunek przedstawia odpowiedź filtru dolnoprzepustowego na c



# Filtr górnoprzepustowy

Opis w dziedzinie częstotliwości.




Jak widać na schemacie najprostszy filtr górnoprzepustowy otrzymujemy przez zamiane R i C miejscami w flitrze dolno-przepustowym. Dla tak otrzymanego dzielnika napięcia mamy

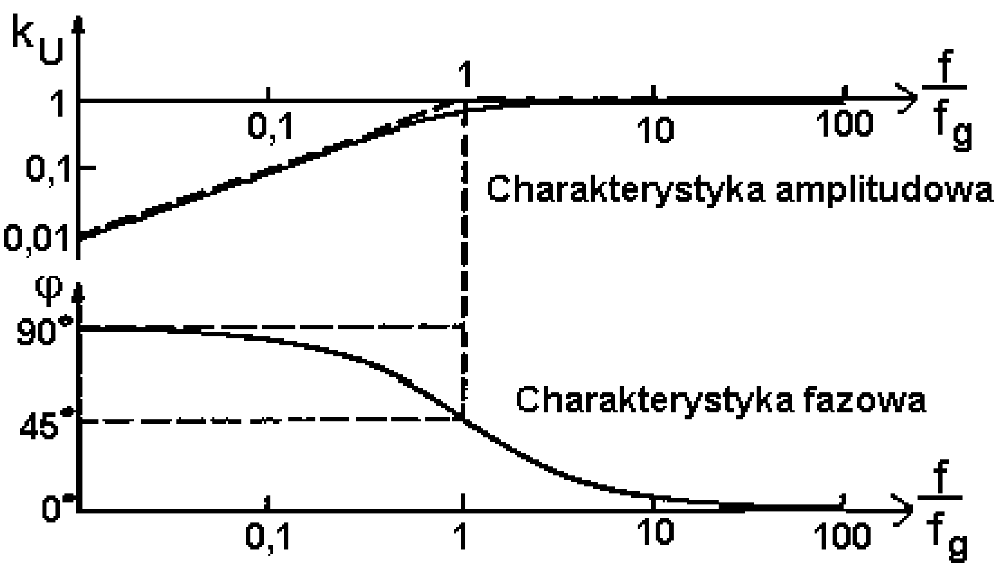
zespolony wsp. wzm. $$K_U = \frac{\mathbf{U}_{wy}}{\mathbf{U}_{we}} = \frac{I\,R}{I(R + \frac{1}{j\omega C})} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}}$$

Moduł wsp. wzm. $$k_U = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}$$

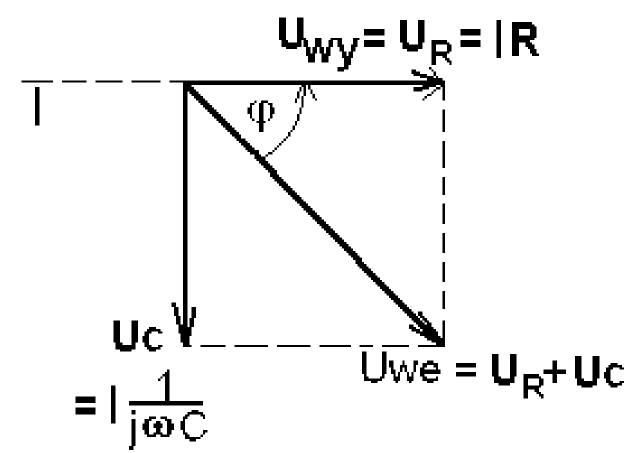
Argument: $\mathrm{Arg}(K_U) = \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(K_U)}{\mathrm{Re}(K_U)}\right) = \mathrm{arctg}\frac{1}{\omega RC}$, jest to kąt o jaki faza $U_{wy}$ jest prze-sunięte względem fazy $U_{we}$.

Moduł $k_U$ osiąga wartość maksymalną równoą 1 dla częstości kątowej $\omega \to \infty$, zatem $\omega_g$ znajdujemy z równości: $\frac{k_U(\omega_g)}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (3 - decybelowe osłabienie od wartości 1) $\omega_g = \frac{1}{RC}$

Zależność modułu i argumentu z Ku (wsp. wzmocnienia tj. przenoszenia i przesunięcia fazy) od częstotliwości.



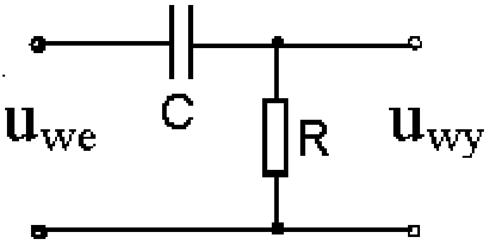

Wykres wskazowy napięć prz częstotliwości granicznej fg.




widać, że $|U_R| = |U_C|$ bo $R = \frac{1}{\omega_g C}$

# Filtr górno-przepustowy, opis w dziedzinie czasu.

Gdy na wejście przyłożymy jakieś napięcie $u_{we}(t)$ na wyjściu pojawi się odpowiedź $u_{wy}(t)$.



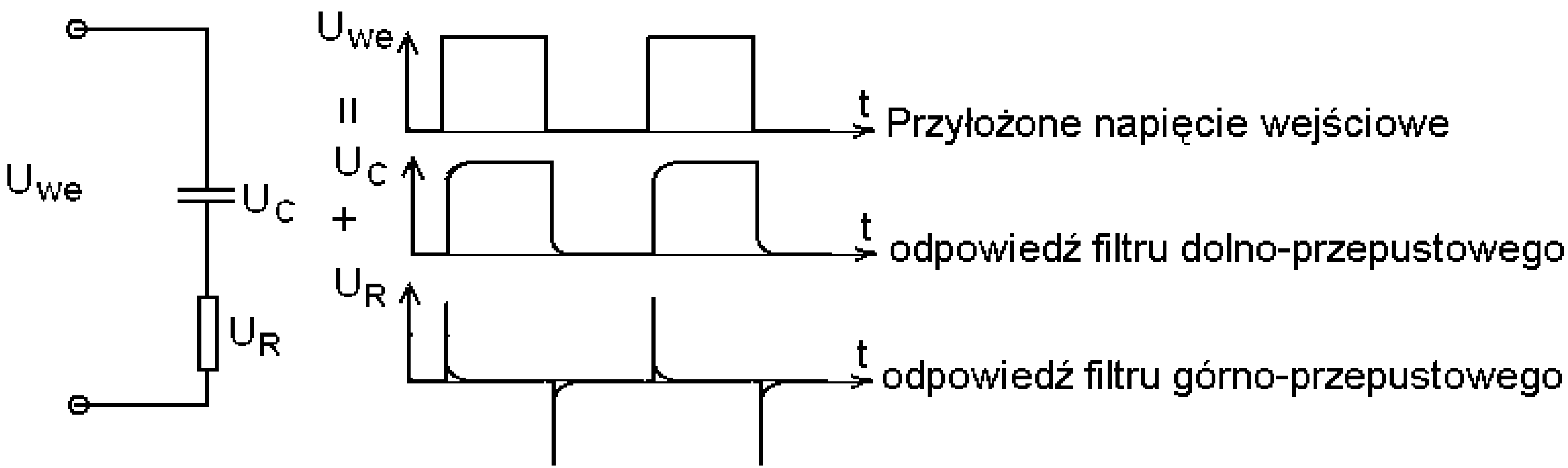

Pojawi się prąd: $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{d}{dt}u_c = C\frac{d}{dt}(u_{we} - u_{wy})$

$$u_{wy} = u_R = iR = RC\frac{d}{dt}(u_{we} - u_{wy})$$

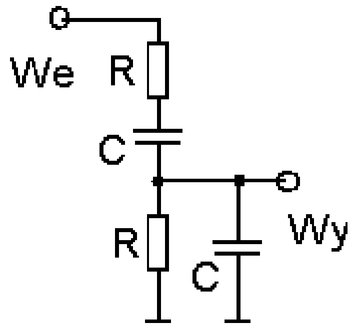
Kiedy $u_{wy} << u_{we}$ i możemy je pominącać w nawiasie przy $u_{we}$ dostajemy układ

różniczkujący: $u_{wy} \approx RC\frac{d}{dt}u_{we}$ (dla małych, $\omega$ kiedy $|X_C| >> R$, również $u_{wy} << u_{we}$)

Warto zauważyć, że odpowiedź filtru górno-przepustowego $u_R$ na napięcie wejściowe jest dopełnieniem napięcia $u_c$ do napięcia $u_{we}$. Bo $u_R + u_c = u_{we}$



# **Filtr pasmowo-przepustowy** tłumi jednocześnie sygnały o częstotliwościach niższych od $f_{g.\ dolna}$ oraz sygnały o częstotliwościach wyższych od $f_{g.\ górna}$. Przykładem takiego filtra może być kaskadowe połączenie filtrów: górno i dolno przepustowego o odpowiednio dobranych częstotliwościach granicznych. Przykład z identycznymi $f_g$ poniżej.




$$U_{wy} = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+j\omega C}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+j\omega C}+R+\dfrac{1}{j\omega C}}U_{we} = \frac{1}{3+j(\omega RC-\dfrac{1}{\omega RC})}U_{we}$$

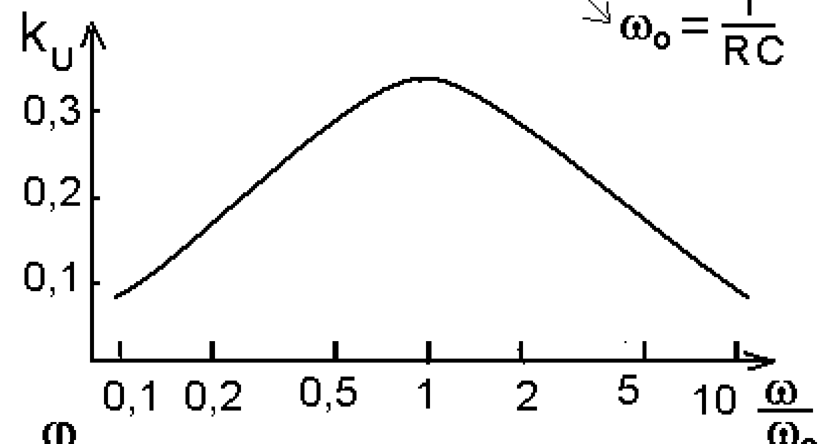
$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

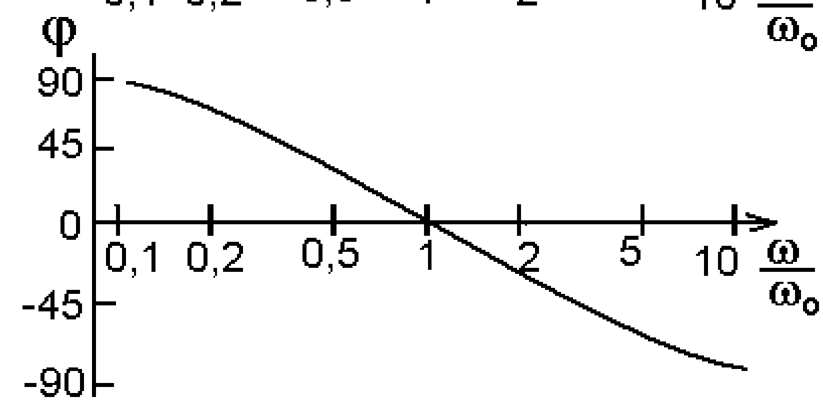
$$k_U = \left|\frac{U_{wy}}{U_{we}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC-\dfrac{1}{\omega RC})^2+9}}$$

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{-(\omega RC-\dfrac{1}{\omega RC})}{3} =$$

$$\text{arctg}\,\frac{1-(\omega RC)^2}{3\omega RC}$$

$$k_{U_{max}} = k_U(\omega_o) = \frac{1}{3}$$



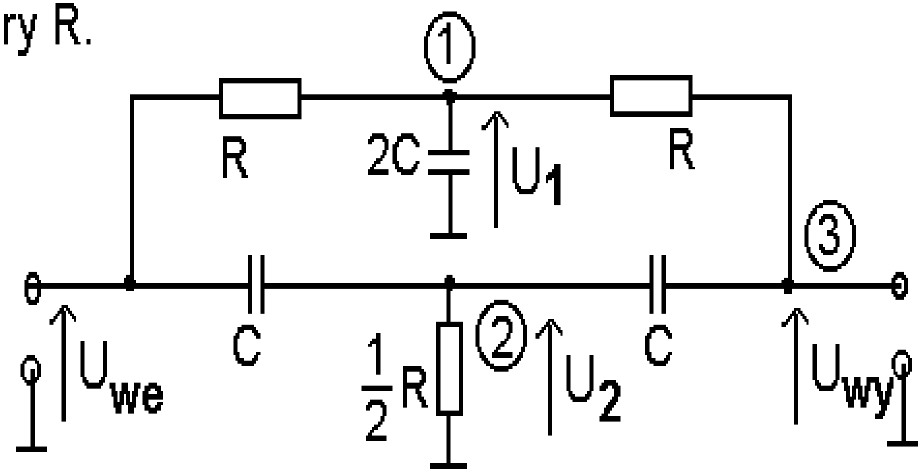
**Zastosowanie filtrów**

Filtry są stosowane do kształtowania charakterystyk częstotliwościowych układów elektronicznych i do kształtowania impulsów napięciowych. Wybierania jednych i eliminowania innych sygnałów (zakłócających) np. tunery to po prostu przestrajalne filtry pasmowe. W zasadzie każde urządzenie elektroniczne zawiera filtry. Filtry górno-przepustowe stosowane są często jako pojemnościowe sprzężenie między układami elektronicznymi (np. wzmacniaczami) celem zablokowania tzw. składowej stałej. Sygnały w.cz. mogą nieoczekiwanie przeniknąć przez pojemności wyłączników, albo zbliżonych do siebie przewodów powodując wzajemne zakłócanie obwodów elektronicznych.

Warto pamiętać, że filtry typu RC lub RL wykazują raczej łagodne stromości charakterystyk. Natomiast bardziej złożone filtry typu RLC (zawierające obwody rezonansowe o dużej dobroci) mogą wykazywać bardzo duże stromości na brzegach pasm!

Filtr typu podwójne T Jest to filtr pasmowo-zaporowy i nadaje się do tłumienia określonego pasma częstotliwości. Dla wielkich i małych częstotliwości napięcie wyjściowe jest bliskie napięciu wejściowemu. Sygnały o dużej częstotliwości są dobrze przenosone przez dwa kondensatory C, a sygnały o małej częstotliwości - przez dwa rezystory R.

W celu wyznaczenia charakterystyki częstotliwościowej i fazowej wystarczy zastosować I prawo Kirchhoffa dla węzłów 1, 2 i 3 (zaznaczonych na rysunku):




węzeł 1 $$\frac{U_{we}-U_1}{R} + \frac{U_{wy}-U_1}{R} - U_1 j\omega 2C = 0$$

węzeł 2 $$(U_{we}-U_2)j\omega C + (U_{wy}-U_2)j\omega C - \frac{2U_2}{R} = 0$$

węzeł 3 $$(U_2 - U_{wy})j\omega C + \frac{U_1 - U_{wy}}{R} = 0$$

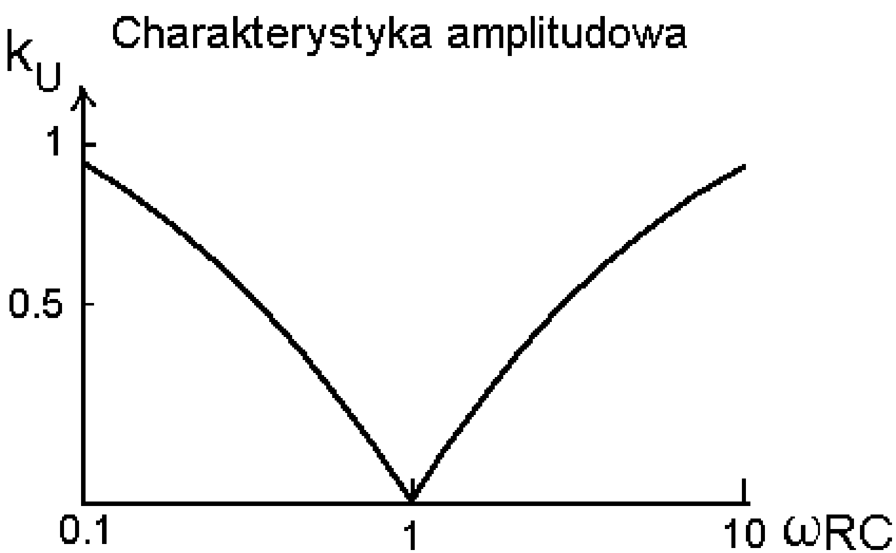
Po eliminacji U1 i U2 otrzymujemy:

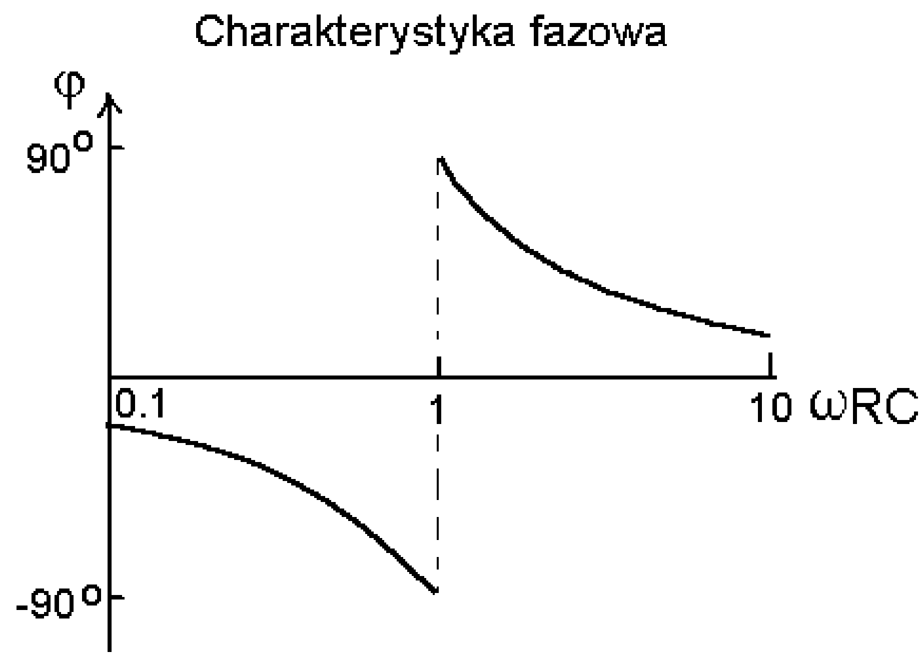
$$\overline{K}_U = \frac{1 - (\omega RC)^2}{1 + j4\omega RC - (\omega RC)^2};$$

$$k_U = \frac{\left|1 - (\omega RC)^2\right|}{\sqrt{(1-(\omega RC)^2)^2 + 16(\omega RC)^2}};$$

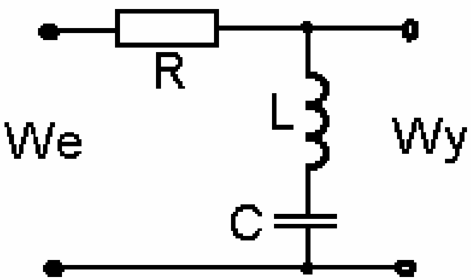
$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{4\omega RC}{(\omega RC)^2 - 1}$$

Charakterystyki filtru typu podwójne T



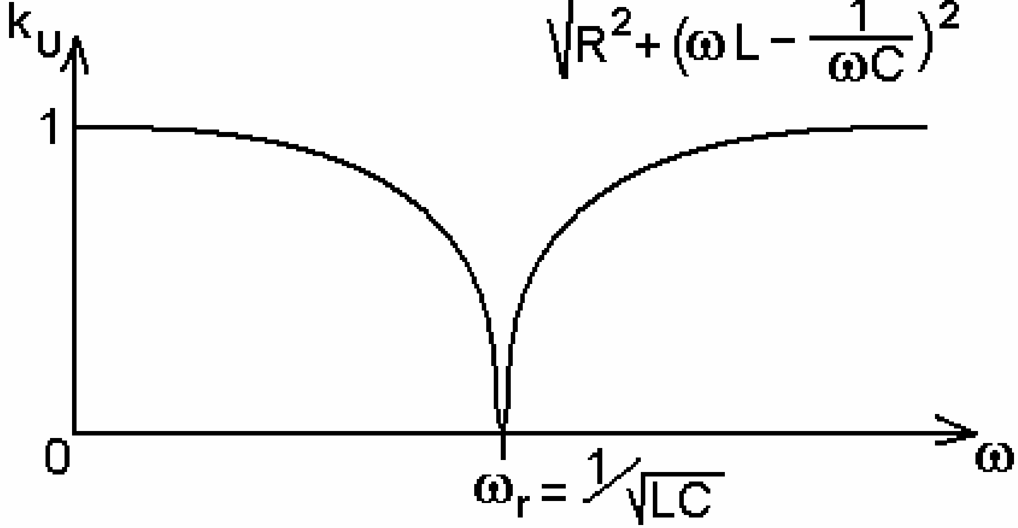



Kolejnym przykładem pożytecznego dzielnika napięcia, który jednocześnie jest filtrem pasmowo - zaporowym, jest tzw. pułapka fonii. Jej zadaniem jest wyeliminowanie fonii z toru wizji w odbiorniku telewizynym.




$$\left|\frac{U_{Wy}}{U_{We}}\right| = \left|\frac{X_L + X_C}{R + X_L + X_C}\right| = \left|\frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\right| = \left|\frac{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\right| =$$

$$\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega = \omega_{rezonansu} \\ 1 & \text{dla } \omega \text{ z dala od } \omega_{rezonansu} \end{cases}$$



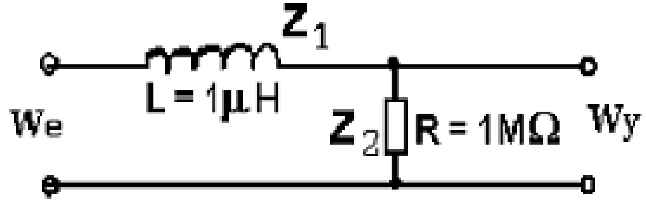

Impedancja szeregowo połączonych L i C osiąga wartość zero przy częstotliwości kątowej (pulsacji) $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ , czyli w rezonansie LC.

Spadek napięcia na tym układzie LC, czyli ta część, która przeszła przez filtr też osiąga wartośc zero.

Widać zatem że pułapka wycina sygnał o częstotliwości, na którą nastrojony jest układ elementów L i C. Warto zauważyć, że dla $\omega = \omega_{rezonansu}$ chociaż $U_{Wy} = 0$ gdzie $U_{Wy} = U_C + U_L$ to same $U_C$ lub $U_L$ może być wielokrotnie większe od $U_{We}$ bo w rezonansie $X_L + X_C = 0$ natomiast $|U_C| = |U_L| = |U_{We}| \frac{|X_C|}{R} = |U_{We}| \frac{|X_L|}{R}$ .

**Przykład**

Określić pasmo przenoszenia podanego układu.




Rozwiazanie

Układ jest szeregowym połączeniem dwu impedancji $Z1 = j\omega L$ i $Z_2 = R$. Układ dobrze przenosi sygnały o niskich częstotliwościach. Dla częstości $\omega = 0$ $Z1 = 0$ i napięcie wyjściowe jest identyczne z napięciem wejściowym. Zatem $ku_{max} = ku(\omega = 0) = 1$ i dolna granica pasma $fg_1 = 0$

Górną granicę pasma $fg_2$ znajdziemy z definicji częstotliwości granicznej.

Def. $\left|\dfrac{ku(fg)}{ku_{max}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ Ponieważ $ku_{max} = 1$ otrzymujemy warunek na $fg_2$: $|ku(fg)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Dla naszego układu (dzielnika napięcia) wyrażenie na ku(f) ma postać:

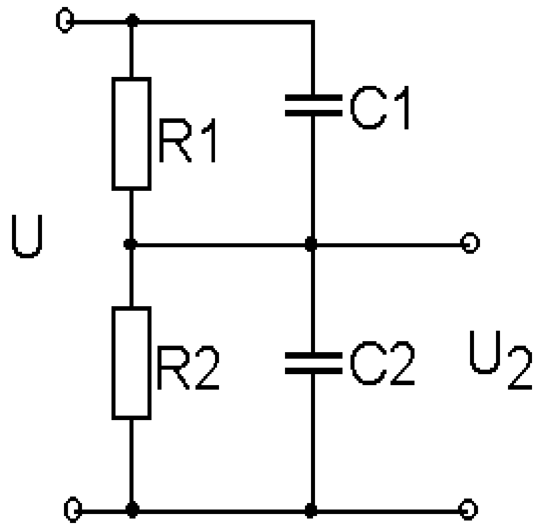
$ku(f) = \dfrac{Z_2}{Z1 + Z_2} = \dfrac{R}{j\omega L + R}$ Zatem warunek na $\omega_g$ $(=2\pi f_g)$ ma postać: $\left|\dfrac{R}{R + j\omega_g L}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{R}{\sqrt{(R + j\omega_g L)\cdot(R - j\omega_g L)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega_g L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{(\omega_g L)^2}{R^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\omega_g L}{R} = 1 \rightarrow \omega_g = \frac{R}{L} \rightarrow f_g = \frac{R}{2\pi L} = \frac{1M\Omega}{2\cdot 3.14\cdot 1\mu H} = 1.6\cdot 10^{11}\,Hz.$$

Pasmo przenoszenia to obszar częstotliwości od 0 do $1.6\ 10^{11}$ Hz. Ten szokujący wynik jest skutkiem idealizacji ( zaniedbania pojemności pacożytniczych itp.)

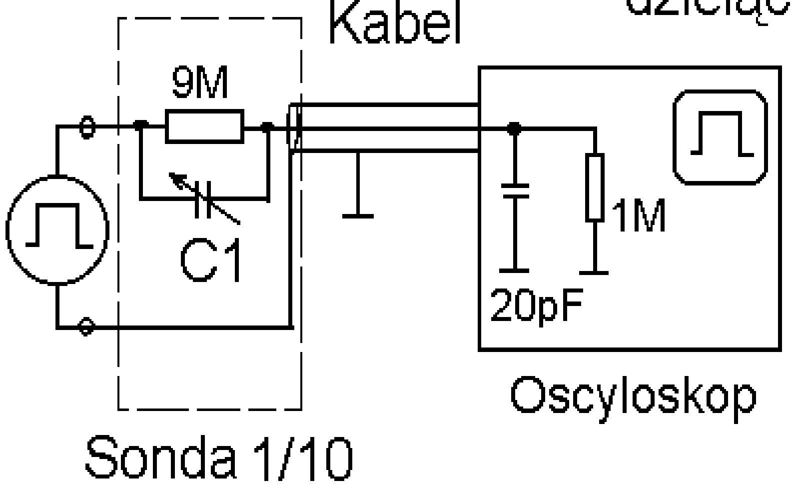
## Skompensowany dzielnik napięcia




Często wyjście jednego układu z wejściem następnego układu np. oscyloskopu tworzy niepożądany filtr dolnoprzepustowy. Należy wtedy dobrać kondensator C1 tak aby powstał tzw. skompensowany dzielnik napięcia, w którym spełniona jest równość:

$$\frac{R1}{R2} = \frac{C2}{C1} \quad \text{wtedy} \quad \frac{R1}{R2} = \frac{X_{C1}}{X_{C2}} \quad \text{i otrzymany}$$

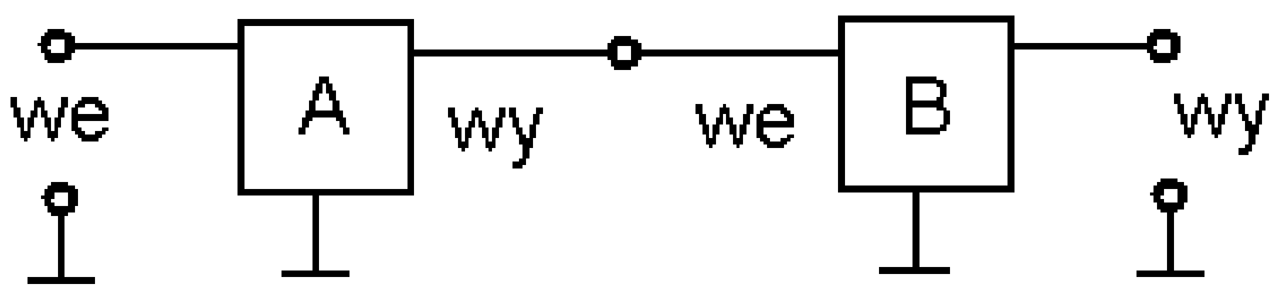
dzielnik napięcia będzie niezależny od częstotliwości. Bowiem mamy tu dwa identycznie dzielące sygnał dzielniki połączone równolegle.



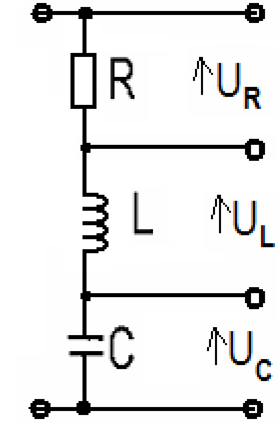

Regulując C1 w sondzie typu 1/10 obserwujemy odpowiedź na prostokątny sygnał. Przy optymalnym C1 przebieg na ekranie oscyloskopu będzie wierną kopią sygnału. Sygnał będzie widoczny bez zniekształcen.

# Prosta zasada łączenia układów

(np. pojedynczych filtrów w filtry wielostopniowe) mówi, że jeżeli obwód A steruje obwodem B (B obciąża obwód A) to warto zadbać o to aby $R_{\text{wy układu A}} < 0{,}1R_{\text{WE układu B}}$. Wtedy wpływ B – układu obciążenia na A – układ sterujący będzie mało znaczący. Układ A po obciążeniu go takim układem B działa z zaburzeniem nie przekraczającym 10% *(A wystawia na swoim wyjściu o 10% napięcie niższe niż w przypadku braku obciążenia).* W sytuacji gdy takie 10%-we odchylenie możemy zaniedbać uzyskujemy prosty sposób na projektowanie wielostopniowych układów. Po prostu każdy podukład (stopień) projektujemy i obliczamy osobno (obliczenia są proste).



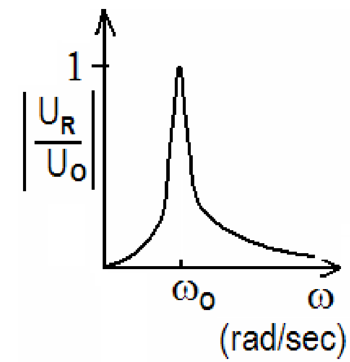
Dla poprawienia efektu filtracji stosowane są bardziej rozbudowane filtry, w tym filtry aktywne czy filtry cyfrowe.
Filtry aktywne powstają poprzez zastosowanie układów aktywnych (tranzystorów, wzmacniaczy operacyjnych itp.) w obwodach filtrujących RLC. Elementy aktywne (dzięki dużej impedancji wejściowej i efektowi wzmacniania sygnału) pozwalają na budowanie filtrów wielostopniowych o bardzo stromym przebiegu charakterystyk na brzegach filtrowanych pasm.
Filtry cyfrowe to układy filtrujące i przetwarzające sygnały dyskretne (cyfrowe).
Filtry cyfrowe są coraz częściej i szerzej stosowane w wielu dziedzinach techniki bowiem każdy sygnał analogowy (prosty jednowymiarowy jak i złożony wielowymiarowy, fotografia, film itp) można zamieniać na sygnał cyfrowy odpowiednimi przetwornikami analogowo-cyfrowymi.
(Skrót „DSP" oznacza: digital signal processing)
*http://www.intersil.com/data/AN/an9603.pdf*




**Dobroć Q** (Q-factor, quality factor) jest miarą ostrości krzywych rezonansowych. Dla pasmowego filtra z obwodem rezonansowym (jak na rysunku obok) jest zdefiniowany jako: $Q = \omega_{rez}/\Delta\omega_{3dB} = f_{rez}/\Delta f_{3dB}$.
Q można wyrazić za pomocą wartości elementów filtra RLC.
Np. gdy $U_{WY} = U_R$ to $k_u = |U_R/U_{RLC}|$ i $k_{umax} = 1$ $\quad k_u/k_{umax} =$

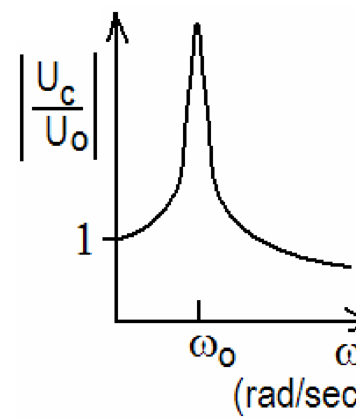
$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_{3dB}L - \frac{1}{\omega_{3dB}C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \omega_{3dB}L - \frac{1}{\omega_{3dB}C} = \pm R$$

$$L\omega_{3dB}^2 \mp R\,\omega_{3dB} - \frac{1}{C} = 0$$




$$\omega_{3dB_1} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \qquad \omega_{3dB_2} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \qquad \Delta\omega_{3dB} = \frac{R}{L}$$

**Zatem** $Q = \omega_{rez}L/R$. Dodajmy, że w elektronice poza dobrocią układów rezonansowych mówi się o dobroci innych układów czy elementów. Przykładowo dobroć cewki zdefiniowana jest jako stosunek: $\omega L/R$ (gdzie L-indukcyjność cewki, R oporność cewki).
Traktując kondensator jako równoległe połączenie idealnej pojemności i rezystancji R (reprezentującej straty dielektryczne) definiujemy dobroć kondensatora jako stosunek prądów $I_C/I_R = (U/X_C)/(U/R) = R/X_C = \omega CR$.
Wynika z tego, że układy o dużej dobroci to takie, które „marnotrawią” mało energii na straty w rezystancjach przewodów cewki i rezystora R.



Duża wartość Q oznacza: długi czas zaniku drgań, małe tłumienie czyli małe tempo tracenia zgromadzonej energii, wąski i wysoki wierzchołek na krzywej obrazującej zależność "odpowiedzi" układu od częstotliwości sygnału wzbudzającego.

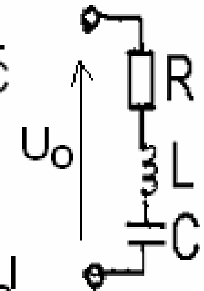
$Q = f_r/\Delta f_{3dB} = \omega_r/\Delta\omega_{3dB}$ W elektronice ten bezwymiarowy parametr może określać zdolność obwodu do gromadzenia energii

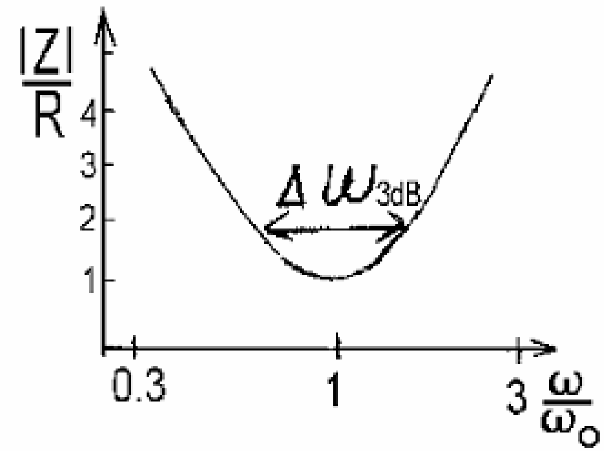
Dla szeregowego układu RLC i $\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = |U_C|/|U_O| = |U_L|/|U_O| =$

$= \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

gdy Q>>1
to w rezonansie
$|U_C|=|U_L|>>|U_O|=|U_R|$

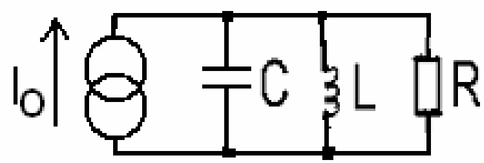


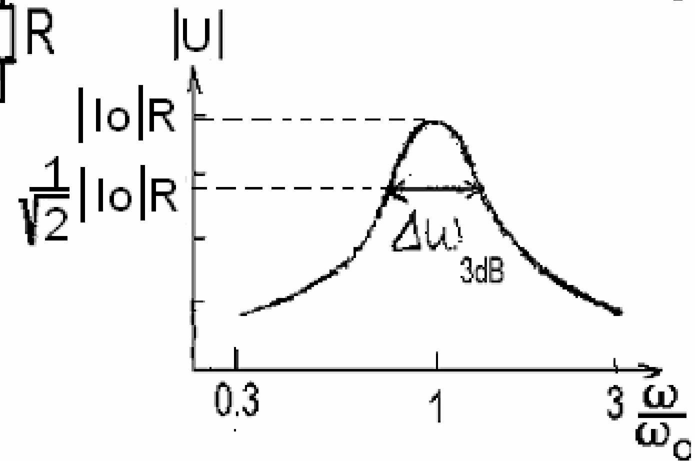




Dla równoległego układu RLC

admitancja $Y=Y_R+Y_L+Y_C=$

$\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$ $\quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



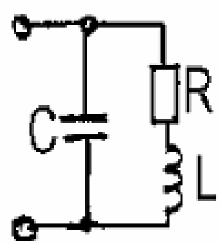




Energia zgromadzona (w L i C) wynosi $\frac{1}{2}CU^2 =$ $\frac{1}{2}C|RI|^2$ $\quad Q = 2\pi \frac{\text{En. zmag. w rez.}}{\text{En. tracona w 1cyklu}} =$

$$\frac{2\pi \frac{1}{2}C|RI|^2}{\frac{1}{2}R|I|^2\ T} = \frac{2\pi \frac{1}{2}C|RI|^2}{\frac{1}{2}R|I|^2 \frac{2\pi}{\omega_r}} = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Dla typowego układu równoległego

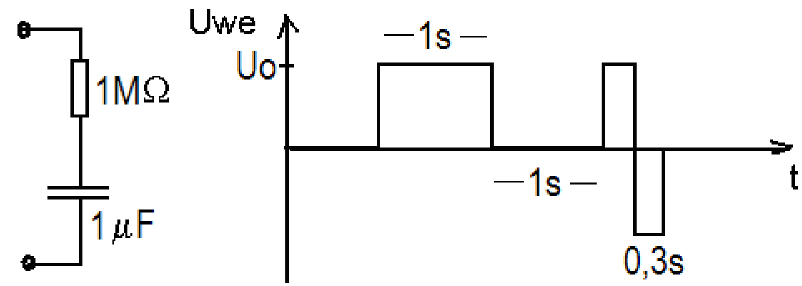
w rezonansie $|I_{LR}| \approx |I_C| >> |I_O|$ $\quad Q \approx \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$



# Elektronika lista zadań 04

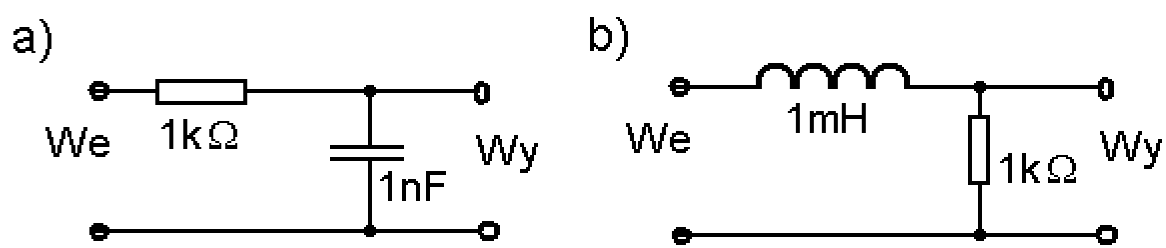
1 Narysuj wykres wskazowy dla układu równolegle połączonych L = 10mH i C = 50μF, zasilanych z generatora napięcia sinusoidalnego o pulsacji ω = 1000 rad/s i amplitudzie 1V. Impedancja wewnętrzna generatora wynosi Rwe = 1Ω.

2 Na zaciski układu RC podano sygnał o złożonym (prostokątnym) przebiegu. Naszkicuj przebiegi napięć UR i UC.




3. Szeregowy obwód rezonansowy zawiera: R = 1Ω, L = 1mH, C = 1μF. Oblicz dobroć układu i stosunki: UR/UWe, UC/UWe i UL/UWe w rezonansie (Uwe - napięcie zasilające o częstotliwości rezonansowej).

4. Wylicz częstotliwości graniczne i określ pasma przenoszenia układów:




5. Zaprojektuj filtr pasmowy dla pasma 1 kHz-10kHz wykorzystując prostą zasadę ułatwiającą obliczenia: Zwy/Zwe ≤1/10.